

---

**Contrôle numéro 6 du 10 Décembre 2021**

Durée : 40 minutes

Les documents et les téléphones/calculatrices/ordinateurs sont interdits.

---

Vous devrez faire attention à rédiger correctement. Toute rédaction incomplète ou imprécise sera sanctionnée même si le raisonnement est correct. **N'écrivez pas au crayon à papier.**

**Exercice 1** (6 points)

1. Donnez la définition du coefficient dominant d'un polynôme.
2. (Vrai/Faux) :  $\text{ppcm}(a, b) \mid (ab)$ .
3. (Vrai/Faux) : Pour  $p$  premier,  $(p \mid a^2) \Leftrightarrow (p^2 \mid a^2)$ .
4. (Vrai/Faux) : Le  $\text{ppcm}(a, b)$  ne divise jamais  $a$ .
5. (Vrai/Faux) : Un polynôme ne possédant que des racines multiples est de degré pair.
6. (Vrai/Faux) : Dans  $\mathbf{C}[X]$ , si  $P$  et  $P'$  ne sont pas premiers entre eux, alors  $P$  a une racine multiple.

**Exercice 2** (3 points) Pour  $n \in \mathbf{N}$ , quels sont les restes possibles de  $38 + 14^n - 12^n$  divisé par 13 ?

**Exercice 3** (6 points) On considère l'équation  $15x - 42y = 6$ .

1. Calculez  $\text{pgcd}(15, 42)$  et déterminez un couple d'entiers solution de l'équation.
2. Déterminez tous les couples d'entiers solutions de l'équation.

**Exercice 4** (5 points) Dans  $\mathbf{R}[X]$  on considère l'équation  $P'(X^2) = 2P(X)$ .

1. Déterminez les solutions constantes de l'équation.
2. Soit  $P$  une solution non constante. Prouvez que le degré de  $P$  doit être 2.
3. Soit  $P(X) = aX^2 + bX + c$  une solution. Que doivent vérifier  $a, b$  et  $c$  ?