FONDAMENTAUX DES MATHEMATIQUES 1

automne 2021

3 enseignements

- COURS lundi a-m, jeudi matin, vendredi matin } 2 enseignants en alternance
  G. AUBRUN (BRACONNIER 227)
  L. BETERMIN (— 201)

- TD 6 groupes jeudi matin, vendredi a-m (début la semaine prochaine)

- ES (Etudes surveillées) vendredi matin

Programme les maths du lycée en plus solide
+ quelques nouveautés.

Evaluation
- Petits tests hebdomadaires
  → moyenne CC (note de contrôle continu)
- Partiel à mi-semestre
  → note CP
- Examen final fin décembre
  → note CF

Note retenue : $0,4 \times CC + 0,3 \times CP + 0,3 \times CF$

On insistera sur la rigueur de la rédaction

<u>Exemple</u> : on ~~de~~ ne divise pas par zéro

En particulier, si on divise par un nombre réel x, il faut auparavant avoir expliqué que $x \neq 0$.

Plus concrètement

REDACTION CORRECTE

Soit t un nombre réel. On a $t^2 \geq 0$ donc $t^2+1 \geq 1$ donc $t^2+1 \neq 0$.

On peut donc écrire $\dfrac{1}{t^2+1}$.

Si on écrit $\dfrac{1}{t^2+1}$ sans avoir expliqué pourquoi on peut, le correcteur va vous pénaliser.

1.1 Les ensembles de nombres

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ les entiers naturels

Variante $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \ldots\}$

$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$ les entiers relatifs

On a $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$

$\uparrow$ symbole "inclus dans"

(on dit $A \subset B$ si tout élément de A est dans B).

Autre symbole similaire $\in$ le symbole "appartient à"

$n \in \mathbb{N}$ se lit "n appartient à $\mathbb{N}$"

c'est-à-dire "n est un des entiers naturels"

Piège : ne pas confondre les symboles $\subset$ et $\in$

On a $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ $\mathbb{Z} \not\subset \mathbb{N}$

$3 \in \mathbb{N}$
$3 \in \mathbb{Z}$
$-4 \in \mathbb{Z}$
$-4 \notin \mathbb{N}$

Mais on n'écrit pas $\cancel{5 \subset \mathbb{N}}$ $\leftarrow$ cet énoncé n'a pas de sens

$\mathbb{Q}$ l'ensemble des nombres rationnels (= fractions)

$\mathbb{Q} = \left\{ \text{quotients de la forme } \dfrac{a}{b} \text{ avec } \begin{array}{l} a \in \mathbb{Z} \\ b \in \mathbb{Z}^* \end{array} \right\}$

on précise $b \in \mathbb{Z}^*$ et non $b \in \mathbb{Z}$ pour ne pas diviser par zéro.

<u>Remarque</u> : on pourrait aussi dire $a \in \mathbb{N}$ $b \in \mathbb{Z}^*$.

<u>Difficulté</u> : un même élément de $\mathbb{Q}$ peut être représenté par plusieurs fractions $\dfrac{1}{2} = \dfrac{2}{4}$

On a, pour $\begin{array}{l} a \in \mathbb{Z} \\ b \in \mathbb{Z}^* \end{array}$ $\begin{array}{l} a' \in \mathbb{Z} \\ b' \in \mathbb{Z}^* \end{array}$

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} \quad \text{si et seulement si} \quad ab' = a'b$$

On écrira souvent « P si et seulement si Q »

ou en abrégé « P ssi Q ».

Cela veut dire : si P est vrai, alors Q est vrai

$\boxed{\text{ET AUSSI}}$

si Q est vrai, alors P est vrai

⚠ Ne pas confondre $\mathbb{Q}$ avec l'ensemble $\mathbb{D}$ des nombres décimaux de la forme

$$a \cdot 10^n \quad \text{avec} \quad \begin{array}{l} a \in \mathbb{Z} \\ n \in \mathbb{Z} \end{array}$$

<u>Exemple</u> 46,253 est un nombre décimal

$$\overset{\shortparallel}{46253 \times 10^{-3}} = \frac{46253}{1000}$$

Pour les mathématiciens $\mathbb{Q}$ est plus important que $\mathbb{D}$

fait jouer un rôle privilégié au nombre 10

Un nombre décimal a une suite finie de chiffres après la virgule.

$\mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$ et l'inclusion est stricte (c'est-à-dire $\mathbb{D} \neq \mathbb{Q}$)

En effet, il existe des rationnels non décimaux, comme

$$\frac{1}{3} = 0,\underbrace{33333\ldots\ldots}_{\text{suite infinie de 3.}}$$

$\mathbb{R}$ = ensemble des nombres réels de la forme

$$-\ 75,\ 23675\ldots\ldots$$

un signe + (omis) ou −

un nombre entier

virgule

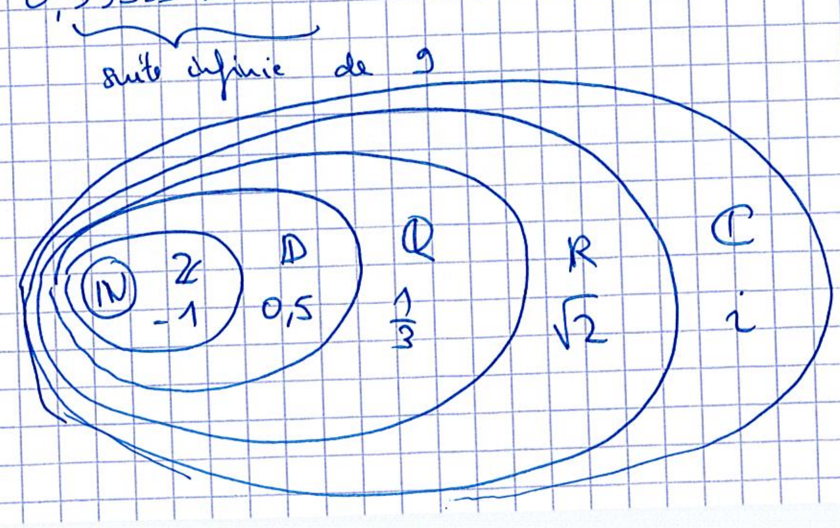
une suite finie ou infinie de chiffres après la virgule.

⚠ Un même nombre peut avoir plusieurs écritures

$$0 = +0 = +0,000 = -0,00$$

$$1 = 0,\underbrace{99999\ldots\ldots}_{\text{suite infinie de 9}}$$

En dessin



1.2 Opérations élémentaires et relation d'ordre

École primaire : on apprend à ajouter, multiplier, comparer les éléments de $\mathbb{N}$.

__Proposition__ On peut définir sur $\mathbb{Q}$ (ou $\mathbb{R}$, ou $\mathbb{C}$) une addition $+$ et une multiplication $\times$ (ou $\cdot$) qui prolonge l'addition et la multiplication de $\mathbb{N}$ et qui vérifie les règles suivantes

ou $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{C}$

- __COMMUTATIVITÉ__ pour tous a, b dans $\mathbb{R}$, on a
$$a+b = b+a$$
$$a \cdot b = b \cdot a$$

- __ASSOCIATIVITÉ__ pour tous a, b, c dans $\mathbb{R}$, on a
$$a+(b+c) = (a+b)+c$$
$$a\cdot(b\cdot c) = (a\cdot b)\cdot c$$

- __DISTRIBUTIVITÉ__ pour tous a, b, c dans $\mathbb{R}$, on a
$$(a+b)\cdot c = a\cdot c + b \cdot c$$

- __ELEMENTS NEUTRES__ pour tout a dans $\mathbb{R}$, on a
$$a+0 = a$$
$$a \cdot 1 = a$$

Pour démontrer la proposition il faut donner un algorithme qui ajoute / multiplie deux éléments de $\mathbb{Q} / \mathbb{R} / \mathbb{C}$ et vérifier tout cela.

Ex : $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z}^*$, $a' \in \mathbb{Z}$, $b' \in \mathbb{Z}^*$
$$\frac{a}{b} \cdot \frac{a'}{b'} = \frac{aa'}{bb'}$$
$$\frac{a}{b} + \frac{a'}{b'} = \frac{ab' + a'b}{bb'}$$

Proposition On peut définir sur $\mathbb{Q}$ (ou $\mathbb{R}$) une relation d'ordre $\leq$ ("inférieur ou égal à") qui prolonge l'ordre de $\mathbb{N}$ et qui vérifie les règles suivantes

- RÉFLEXIVITÉ — Pour tout a dans $\mathbb{R}$, $a \leq a$
- ANTISYMÉTRIE — Pour tous a, b dans $\mathbb{R}$, si $a \leq b$ et $b \leq a$ alors $a = b$
- TRANSITIVITÉ — Pour tous a, b, c dans $\mathbb{R}$, si $a \leq b$ et $b \leq c$ alors $a \leq c$
- ORDRE TOTAL — Pour tous a, b dans $\mathbb{R}$ on a $a \leq b$ ou $b \leq a$

⚠ En maths, "ou" veut dire "l'un ou l'autre, ou les deux à la fois".

⚠ La relation $\leq$ n'est pas définie sur $\mathbb{C}$.

On écrit alors

- $a \geq b$ lorsque $b \leq a$
- $a < b$ lorsque $a \leq b$ et $a \neq b$
- $a > b$ lorsque $a \geq b$ et $a \neq b$ (ou encore, lorsque $b < a$).

La négation logique ($=$ contraire) de $a \leq b$ est $a > b$.