Fonctions convexes et concaves

Soit $f : I \to \mathbb{R}$.

On dit que f est <u>convexe</u> si

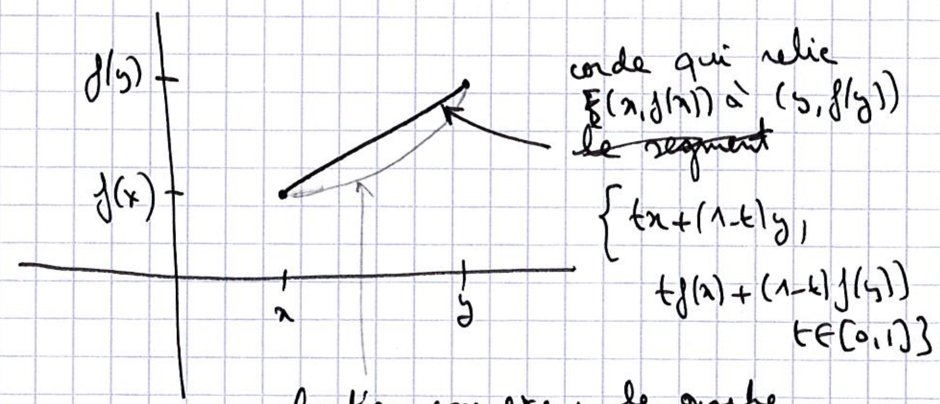
$$\forall x \in I \ \forall y \in I \ \forall t \in [0,1] \qquad f(tx+(1-t)y) \leq tf(x)+(1-t)f(y)$$

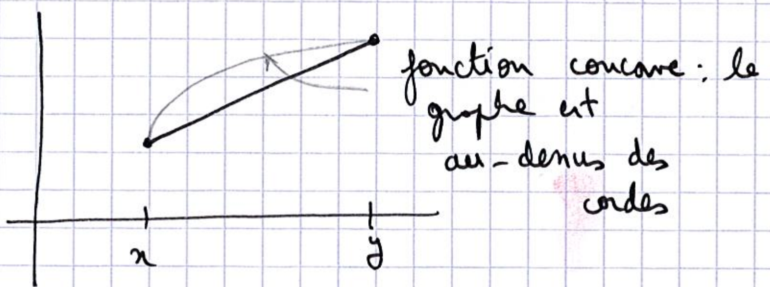
et <u>concave</u> si

$$\forall x \in I \ \forall y \in I \ \forall t \in [0,1] \qquad f(tx+(1-t)y) \geq tf(x)+(1-t)f(y).$$

<u>Remarque</u> f convexe $\iff$ $-f$ concave.

Sur un dessin



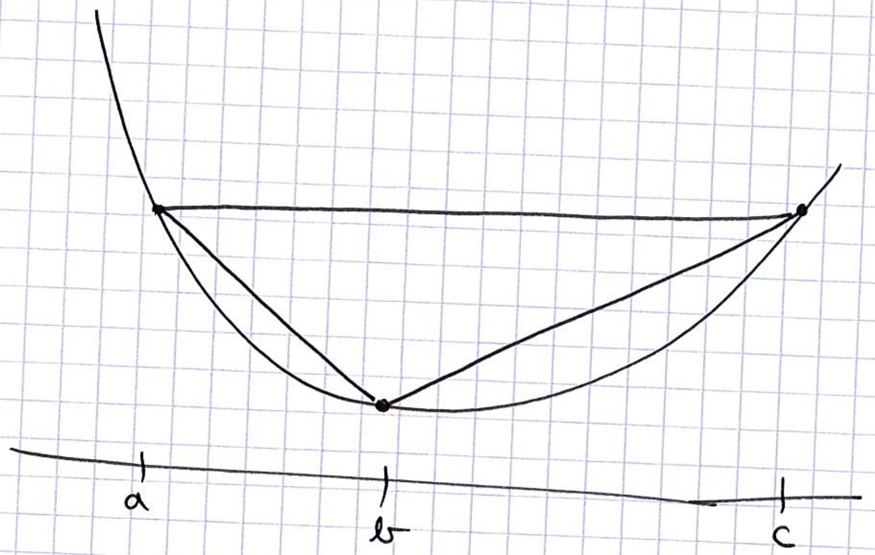


Lemme des trois pentes

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ convexe et $a<b<c$ 3 points de I. Alors

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \overset{(1)}{\leq} \frac{f(c)-f(a)}{c-a} \overset{(2)}{\leq} \frac{f(c)-f(b)}{c-b}$$

pente de la corde entre $(a,f(a))$ et $(b,f(b))$



pente de a vers b $\leq$ pente de a vers c $\leq$ pente de b vers c

<u>Preuve</u> : Posons $t=\dfrac{c-b}{c-a}$; $t\geq 0$ et $1-t=\dfrac{(c-a)-(c-b)}{c-a}=\dfrac{b-a}{c-a}$

donc $t\leq 1$

Comme f est convexe, on a

$$\underbrace{f(ta+(1-t)c)}_{=f(b)}\leq tf(a)+(1-t)f(c)$$

On en tire

$$f(b)-f(a)\leq tf(a)+(1-t)f(c)-f(a)$$
$$=(1-t)(f(c)-f(a))$$

$$f(b)-f(a)\leq \frac{b-a}{c-a}(f(c)-f(a)) \qquad \text{d'où (1)}$$

et

$$f(b)-f(c)\leq tf(a)-tf(c)$$

$$t(f(c)-f(a))\leq f(c)-f(b)$$

$$\frac{c-b}{c-a}(f(c)-f(a))\leq f(c)-f(b) \qquad \text{d'où (2).}$$

On en tire deux conséquences

<u>Théorème</u> Soit $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable. On a l'équivalence entre

(1) f est convexe

(2) f' est croissante sur I

(3) le graphe de f est au-dessus de ses tangentes

$$\left(\forall x,y \in I \qquad f(x) \geq f(y) + f'(y)(x-y) \right)$$

<u>Théorème</u> Soit $f : I \to \mathbb{R}$ deux fois dérivable. On a l'équivalence entre

(1) f est convexe

(2) $f'' \geq 0$

Pour résumer

f convexe "regarde vers le haut"

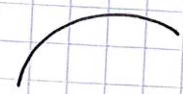
au-dessus des tangentes

en-dessous des cordes

f concave "regarde vers le bas"

en-dessous des tangentes

au-dessus des cordes



Ex :

B2.2 Toutes les fonctions usuelles

• ~~Polyg~~ • Fonctions polynomiales

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $a_0, a_1, \dots a_n$ des réels.

La fonction
$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$$
est une fonction polynomiale de degré n.

Cette fonction est dérivable et sa dérivée est
$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f'(x) = \sum_{k=1}^{n} k a_k x^{k-1} = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \dots + n a_n x^{n-1}.$$

Cas particuliers

$n=0$ on obtient les fonctions constantes.
$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto a_0 \qquad (\text{pour } a_0 \in \mathbb{R})$$

Une fonction constante est croissante et décroissante.
Réciproquement, une fonction croissante et décroissante est constante.

$n=1$ on obtient les fonctions affines
$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto ax+b \qquad (\text{pour } a \in \mathbb{R} \ b \in \mathbb{R})$$

Cette fonction est croissante $\Leftrightarrow a \geq 0$

strictement croissante $\Leftrightarrow a > 0$

Une fonction affine est convexe et concave.
Réciproquement, une fonction convexe et concave est affine.

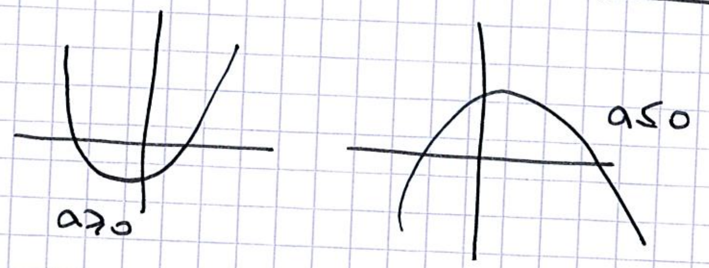
$n=2$ Fonctions trinômes

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto ax^2+bx+c \qquad \forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = 2ax+b, \quad f''(x) = 2a$$

f convexe $\Leftrightarrow a \geq 0$

f concave $\Leftrightarrow a \leq 0$

le graphe de f est une parabole

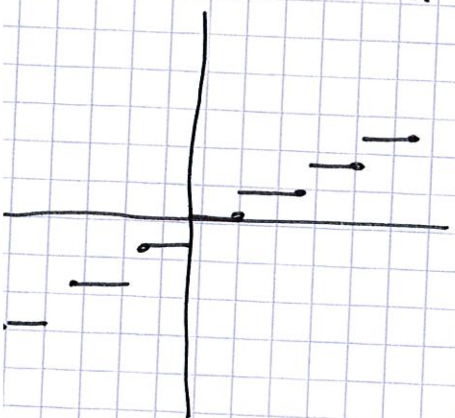


Fonction partie entière E

$\forall x \in \mathbb{R}$, il existe un unique entier relatif noté $E(x)$ qui vérifie $E(x) \leq x < E(x)+1$.

$E(x)$ s'appelle la partie entière de x

$$E : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}, \quad x \mapsto E(x)$$ est la fonction partie entière



E est croissante

~~périodique~~

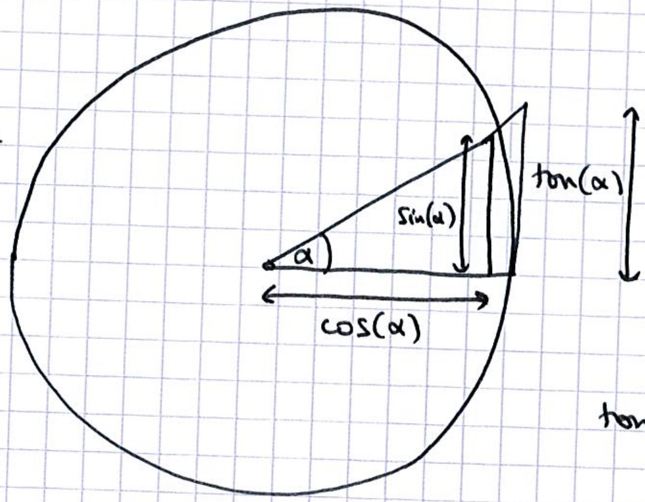
dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ (et de dérivée nulle)

non continue en tout point de $\mathbb{Z}$.

$x \mapsto x - E(x)$ est 1-périodique

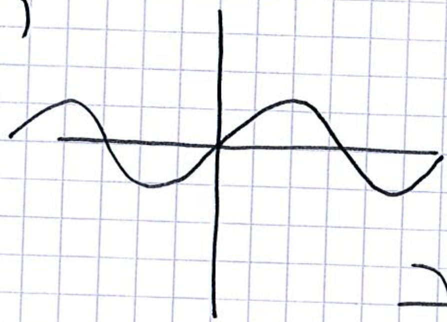
Fonctions trigonométriques

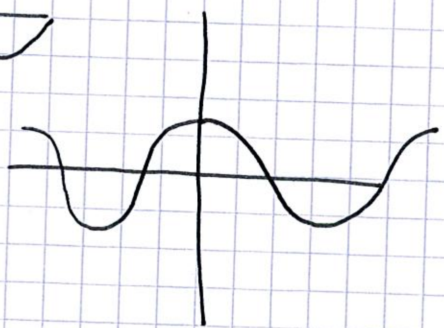
Définition géométique

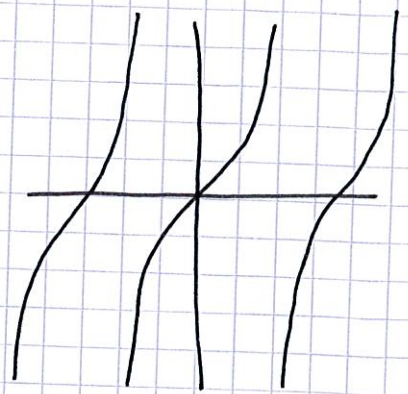


$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

	$x \mapsto \sin(x)$	$x \mapsto \cos(x)$	$x \mapsto \tan(x)$
domaine de définition	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2}(2k+1) : k \in \mathbb{Z} \right\}$
parité	impaire	paire	impaire
période	2π	2π	π
dérivée	$x \mapsto \cos(x)$	$x \mapsto -\sin(x)$	$x \mapsto 1+\tan(x)^2$
primitive (à constante près)	$x \mapsto -\cos(x)$	$x \mapsto \sin(x)$	$x \mapsto -\ln\lvert\cos x\rvert$.
graphe			







Il est commode de définir les fonctions sinus et cosinus via l'exponentielle complexe

$$\cancel{\sin(x)} = \quad \cos(x) = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} \qquad \sin(x) = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$$

$$e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$$