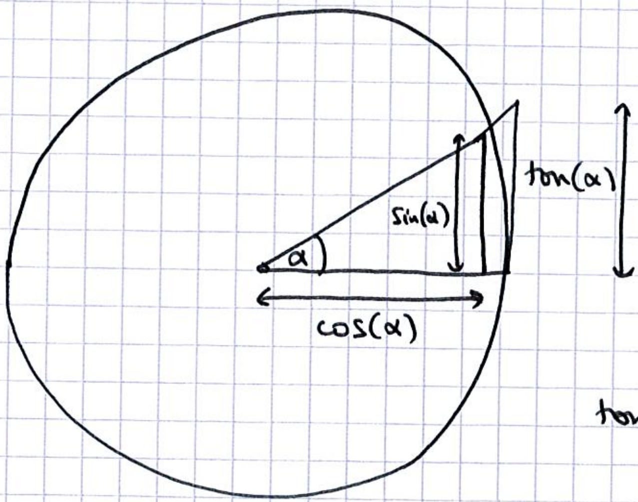
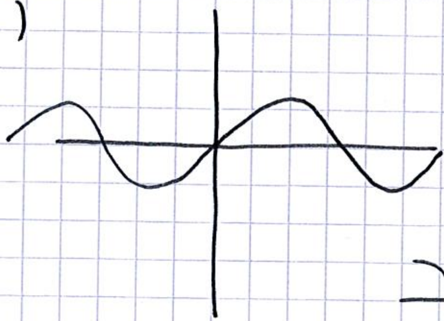
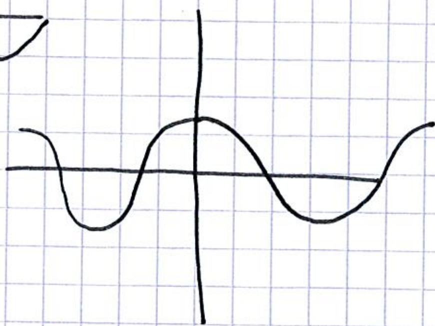
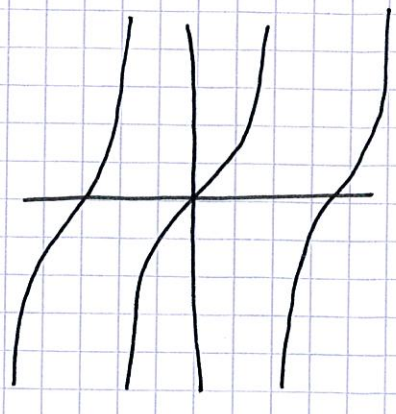
Fonctions trigonométriques

Définition géométrique



$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

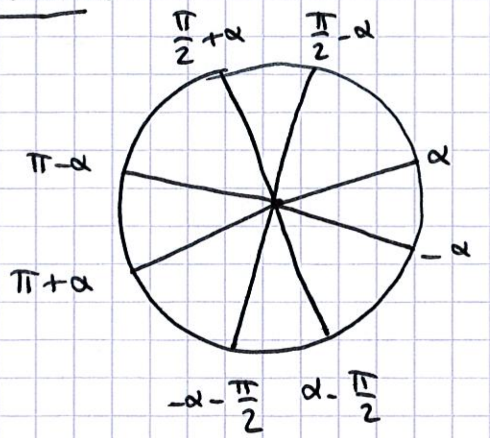
	$x \mapsto \sin(x)$	$x \mapsto \cos(x)$	$x \mapsto \tan(x)$
domaine de définition	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2}(2k+1) : k \in \mathbb{Z}\right\}$
parité	impaire	paire	impaire
période	2π	2π	π
dérivée	$x \mapsto \cos(x)$	$x \mapsto -\sin(x)$	$x \mapsto 1+\tan(x)^2$
primitive (à constante près)	$x \mapsto -\cos(x)$	$x \mapsto \sin(x)$	$x \mapsto -\ln\lvert\cos x\rvert$.
graphe			

Il est commode de définir les fonctions sinus et cosinus via l'exponentielle complexe

$$\cancel{\sin(x)} = \quad \cos(x) = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} \qquad \sin(x) = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$$

$$e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$$

Angles associés



Formules

$$\boxed{\sin^2 x + \cos^2 x = 1}$$

$\sin(-x) = -\sin x$ $\qquad$ $\sin(\pi - x) = \sin x$

$\cos(-x) = \cos x$ $\qquad$ $\cos(\pi - x) = -\cos x$

$\sin(\pi + x) = -\sin(x)$ $\qquad$ $\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos x$ $\qquad$ $\sin(\frac{\pi}{2}+x) = \cos x$

$\cos(\pi + x) = -\cos(x)$. $\qquad$ $\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x$ $\qquad$ $\cos(\frac{\pi}{2}+x) = -\sin x$

Formules d'addition

$$\begin{cases} \sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b) \\ \cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) \end{cases}$$

"cosinus est menteur et raciste".

Cas particulier : $a = b$

$$\sin(2a) = 2\sin(a)\cos a$$

$$\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1$$
$$= 1 - 2\sin^2 a$$

d'où on déduit aussi

$$\cos^2 a = \frac{1+\cos(2a)}{2}$$

$$\sin^2 a = \frac{1-\cos(2a)}{2}$$

On démontrera ces formules (et d'autres) lors du chapitre sur les nombres complexes

Valeurs remarquables

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos(\theta)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin(\theta)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

$\longrightarrow$ on pourrait écrire

$$\frac{\sqrt{0}}{2} \quad \frac{\sqrt{1}}{2} \quad \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \frac{\sqrt{4}}{2} \quad !$$

Les valeurs des autres angles classiques s'en déduisent

$$\cos(\pi) = \cos(\pi + 0) = -1$$

$$\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Fonctions exponentielle et logarithme

Théorème : il existe une unique fonction dérivable $f : \mathbb{R} \to \underbrace{\mathbb{R}^{+*}}_{]0,+\infty[}$

telle que $\begin{cases} f'(x) = f(x) & \forall x \in \mathbb{R} \\ f(0) = 1 \end{cases}$

Cette fonction est notée $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \longmapsto \exp(x)$

Propriété fondamentale $\forall x, y$ dans $\mathbb{R}$ $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$

~~Preuve~~ **Preuve** Fixons $y \in \mathbb{R}$. Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{+*}$

$$x \longmapsto \frac{\exp(x+y)}{\exp(x)\exp(y)}$$

Alors g est dérivable et

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad g'(x) = \frac{\exp(x+y)\exp(x)\exp(y) - \exp(x+y)\exp(x)\exp(y)}{[\exp(x)\exp(y)]^2}$$

$$= 0$$

donc g est constante ; comme $g(0) = 1$ on a

$g(x) = 1$ $\forall x \in \mathbb{R}$ donc $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$.

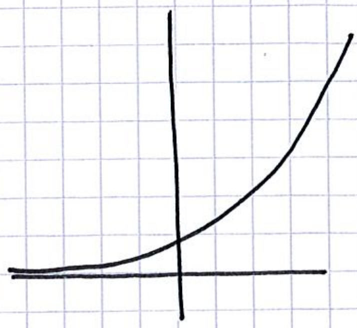
En particulier $\forall x \in \mathbb{R}$ $\exp(-x) = \dfrac{1}{\exp(x)}$

et $\forall x \in \mathbb{R}$ $\forall y \in \mathbb{R}$ ~~et~~ $\exp(x-y) = \dfrac{\exp(x)}{\exp(y)}$

On écrit souvent e^x au lieu de $\exp(x)$

La fonction exp est

- croissante et même strictement croissante
- convexe
- bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$
- a limite 0 en $-\infty$ et $+\infty$ en $+\infty$



On peut donc définir le logarithme comme la bijection réciproque de l'exponentielle.

Définition Soit $x \in]0, +\infty[$.
On note $\ln(x)$ l'unique réel vérifiant

$$\exp(\ln(x)) = x \qquad \forall x \in]0, +\infty[$$

Propriétés La fonction $\ln :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$
$x \longmapsto \ln(x)$

est
- strictement croissante
- concave
- bijective
- a pour limite $-\infty$ en 0 et $+\infty$ en $+\infty$
- dérivable, de dérivée $x \longmapsto \frac{1}{x}$

(pour démontrer le dernier point, on dérive l'égalité

$$\exp(\ln(x)) = x$$

$$\ln'(x) \underbrace{\exp(\ln(x))}_{= x} = 1 \qquad \text{donc } \ln'(x) = \frac{1}{x}).$$

Fonctions trigonométriques hyperboliques

On définit, par analogie avec les fonction cos, sin, tan

$\forall x \in \mathbb{R}$

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$ "cosinus hyperbolique"

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$ "sinus hyperbolique"

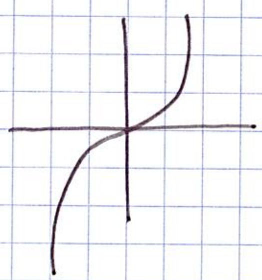
$$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$ "tangente hyperbolique"

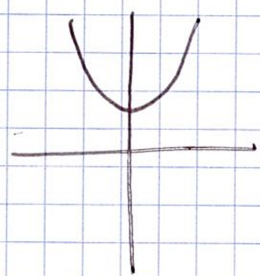
Ces fonctions sont définies sur $\mathbb{R}$. On écrit parfois ch, sh et th

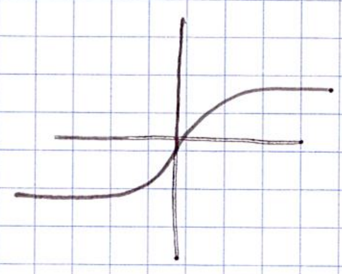
Propriétés

	sinh	cosh	tanh
domaine de définition	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
parité	impaire	paire	impaire
dérivée	cosh	sinh	$1 - \tanh^2$
limite en $+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	1
limite en $-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	-1

graphe







	sinh	cosh	tanh
	concave sur $]-\infty, 0]$ convexe sur $[0, +\infty[$	convexe	convexe sur $]-\infty, 0]$ concave sur $[0, +\infty[$