Calculs sous forme trigonométrique :

Soient $z = re^{i\theta}$ et $z' = r'e^{i\theta'}$ deux nombres complexes non nuls avec r, r', θ, θ' réels.

Alors

$$zz' = rr'e^{i(\theta+\theta')}$$

$$z^n = r^n e^{in\theta} \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{r} e^{-i\theta}$$

$$\bar{z} = re^{-i\theta}$$

~~z=~~ Supposons ~~z~~ $r, r' > 0$. Alors

$$re^{i\theta} = r'e^{i\theta'} \iff r = r' \text{ et } \theta \equiv \theta' \ [2\pi].$$

Attention cela n'est plus vrai si on ne suppose plus $r, r' > 0$

$$1e^{i\pi} = -1e^{i0} \qquad \text{ou encore}$$

$$\boxed{e^{i\pi} + 1 = 0}$$

très jolie formule !

On a aussi

$$e^{i0} = 1 \qquad e^{i\pi/2} = i \qquad e^{-i\pi/2} = -i$$

$$e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \qquad \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} = 1 + i$$

<u>Racines de l'unité</u>

<u>Théorème</u> Soit $n \in \mathbb{N}^*$. L'équation $z^n = 1$ a n solutions dans $\mathbb{C}$: les nombres $e^{2\pi i\frac{k}{n}}$ pour $0 \leq k \leq n-1$

~~Exemp~~ On les appelle les racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unité.

$\underline{n=2}$ les solutions de $z^2=1$ sont $z=1$ et $z=-1$

$\underline{n=3}$ ———————— $z^3=1$ ———— $z=1$ $z=e^{\frac{2i\pi}{3}}=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$z=e^{-\frac{2i\pi}{3}}=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\underline{n=4}$ ———————— $z^4=1$ sont $z=1$ $z=i$ $z=-1$ $z=-i$

Remarque : si z est une racine de l'unité, $\bar{z}$ est aussi une racine $n^{\text{ème}}$ de l'unité (et $\bar{z}\neq z$ si $z\notin[-1,1]$).

Conséquence Soit $a\in\mathbb{C}^*$, et $n\in\mathbb{N}^*$.

L'équation (d'inconnue z) $z^n=a$ a n solutions.

Si $a=re^{i\theta}$ alors $z_0=r^{\frac{1}{n}}e^{i\theta/n}$ est solution

car $z_0^n=\left(r^{\frac{1}{n}}\right)^n\left(e^{i\theta/n}\right)^n=a$

et on obtient toutes les solutions comme

$$z_0\,e^{2i\pi\frac{k}{n}} \quad \text{avec} \quad 0\leq k\leq n-1.$$

Racines carrées Tout nombre complexe $z\in\mathbb{C}^*$ a deux racines carrées (w et $-w$)

On les cherche sous forme trigonométrique ou algébrique

Ex. : $z^2=3+4i$ $z=a+ib$ donne $3+4i=(a+ib)^2$
$=a^2-b^2+2aib$

d'où $|3+4i|^2=5=a^2+b^2$

$$\begin{cases} a^2-b^2=3 \\ 2ab=4 \\ a^2+b^2=5 \end{cases}$$ d'où $a^2=4$ $b^2=1$

et 2 solutions $a=2$ $b=1$ ou $a=-2$ $b=-1$ $\Rightarrow$ solutions $2+i$ et $-2-i$

$$z^2 = \cancel{\tfrac{1}{2}}\ 1+i\sqrt{3} = 2\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$$

racines carrées $\pm\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{6}} = \pm\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}\right)$

$= \pm \frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{i\sqrt{2}}{2}$

<u>Equation du second degré</u>

Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$ avec $a \neq 0$.

On considère l'équation $az^2+bz+c=0$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

On peut écrire

$$az^2+bz+c = a\left(z^2+\frac{b}{a}z+\frac{c}{a}\right) = a\left(\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right)$$

donc $az^2+bz+c=0 \iff \left(z+\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2-4ac}{4a^2}$

~~Soient~~ Soit $\Delta = b^2-4ac$, et soient δ et $-\delta$ les deux racines carrées complexes de Δ. Alors les ~~solutions de~~ racines carrées complexes de $\frac{\Delta}{4a^2}$ sont $\pm\frac{\delta}{2a}$

et les solutions de $az^2+bz+c=0$ sont

$$\frac{-b+\delta}{2a} \quad \text{et} \quad \frac{-b-\delta}{2a}$$

Si $\Delta=0$, il y a une seule solution ; si $\Delta \neq 0$ il y en a deux

Cas particuliers

- $\Delta = 0$ une seule racine (double)
- $\Delta \in \mathbb{R}_+^*$, dans ce cas les racines carrés de Δ sont $+\sqrt{\Delta}$ et $-\sqrt{\Delta}$ et les solutions sont $\frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$
- $\Delta \in \mathbb{R}_-^*$, dans ce cas les racines carrés de Δ sont $i\sqrt{-\Delta}$ et $-i\sqrt{-\Delta}$ et les solutions sont $\frac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}$. Ce sont deux complexes conjugués

Le cas général est celui de $\Delta \in \mathbb{C}$

Exemple $\quad z^2 - 3iz - 3 - i = 0 \qquad a = 1 \quad b = -3i \quad c = -3 - i$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-3i)^2 - 4 \times 1 \times (-3 - i)$$
$$= -9 + 12 + 4i$$
$$= 3 + 4i$$

Les racines carrés de Δ sont $\pm(2+i)$ - cf calcul précédent

Donc les solutions sont $\frac{3i \pm (2+i)}{2}$ soit $\boxed{1+2i}$ et $\boxed{-1+i}$

Théorème fondamental de l'algèbre

Soit P un polynôme non constant à coefficients complexes

$$P(z) = a_d z^d + a_{d-1} z^{d-1} + \dots + a_1 z + a_0$$

avec $a_0, \dots, a_d \in \mathbb{C}$ $a_d \neq 0$.
$d \in \mathbb{N}^*$

Alors il existe $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que $P(z_0) = 0$

Corollaire il existe $z_1, \dots, z_d \in \mathbb{C}$ tel que

$$\forall z \in \mathbb{C} \qquad P(z) = a_d \prod_{i=1}^{d} (z - z_i)$$

On peut toujours factoriser les polynômes dans $\mathbb{C}$

<u>Transformations du plan</u> On identifie $\mathbb{R}^2$ à $\mathbb{C}$.

$$(x,y) \longmapsto x+iy$$

- <u>Homothéties de centre O</u>

L'homothétie de centre O et de rapport $\lambda \in \mathbb{R}^*$ s'écrit en complexes comme

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$z \longmapsto \lambda z$$

$\lambda = -1$ est la symétrie central

- <u>Homothétie de centre quelconque</u>

Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$ et $z_0 \in \mathbb{C}$. Posons $M(z_0) = (\operatorname{Re} z_0, \operatorname{Im} z_0)$

L'homothétie de centre $M(z_0)$ et de rapport $\lambda \in \mathbb{R}^*$ et de centre $M(z_0)$ s'écrit

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$z \longmapsto z_0 + \lambda(z - z_0)$$

Si l'homothétie est donnée par $f : z \to \lambda z + \alpha$ pour $\lambda \in \mathbb{R}^*$, $\alpha \in \mathbb{C}$, on trouve le centre z_0 en résolvant $f(z_0) = z_0$

<u>Exemple</u> Soit f l'homothétie de centre $(0,0)$ et de rapport 2

g ——————— $(0,1)$ ——————— 2

Déterminer $g \circ f$

En complexes $f(z) = 2z$

$$g(z) = i + 2(z - i)$$

$$g \circ f(z) = i + 2(2z - i) = 4z - i$$

$\cancel{4z - i = z \iff z = \frac{i}{4}}$ $\cancel{g \circ f(z) = 4\left(z - \frac{i}{4}\right)}$

$$g \circ f(z) = 4\left(z - \frac{i}{3}\right) + \frac{i}{3}$$

$$g \circ f(z) = z \iff 4z - i = z$$
$$\iff z = \frac{i}{3}$$

donc $g \circ f$ est l'homothétie de centre $\left(0, \frac{1}{3}\right)$ et de rapport 4