Soit $z_0 \in \mathbb{C}$

Translation L'application $z \mapsto z + z_0$
est la translation de vecteur $\overrightarrow{OM(z_0)} = (\mathrm{Re}\, z_0, \mathrm{Im}\, z_0)$

Rotation de centre O

L'application
$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$z \longmapsto z e^{i\theta}$$
~~est~~ correspond à la rotation de centre O et d'angle $\theta \in \mathbb{R}$
(puisque $\rho e^{i\alpha} . e^{i\theta} = e^{i(\alpha+\theta)}$)

Rotation de centre $M(z_0)$

L'application
$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$z \longmapsto z_0 + (z - z_0) e^{i\theta}$$

correspond à la rotation de centre $M(z_0)$ et d'angle $\theta \in \mathbb{R}$

On appelle similitude directe la composition d'une homothétie et d'une ~~translation~~ rotation de même centre.

Soient $a \in \mathbb{C}^*$ $b \in \mathbb{C}$. L'application
$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$z \longmapsto az + b$$

est une translation si $a = 1$

est une similitude directe si $a \neq 1$. On trouve son centre z_0 en résolvant $z_0 = az_0 + b \iff z_0 = \frac{b}{1-a}$

$$az + b = \frac{b}{1-a} + a\left(z - \frac{b}{1-a}\right). \quad \text{Ecrivons } a = re^{i\theta} \quad \begin{matrix} r > 0 \\ \theta \in \mathbb{R} \end{matrix}$$

$z \mapsto az + b$ est la similitude directe de centre $\frac{b}{1-a}$, de rapport r et d'angle θ.

Chapitre B3

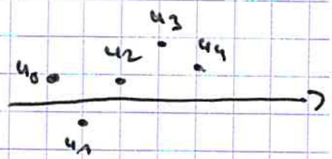
Suites réelles

Définition On appelle suite réelle une fonction de $\mathbb{N}$ (ou $\mathbb{N}^*$) dans $\mathbb{R}$.

B3.1 Suites

On ~~la~~ note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la fonction $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$

$n \longmapsto u_n$



Exemples de suites : $u_n = 3n+7$ pour $n \in \mathbb{N}$

$v_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Définition Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est

(penser aux parenthèses)

- croissante si $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} \geq u_n$
- décroissante si $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} \leq u_n$
- monotone si elle est croissante ou décroissante
- majorée si $\exists M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leq M$
- minorée si $\exists m \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \geq m$
- bornée si elle est majorée et minorée

Remarque ① si une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante alors

$m \leq n \Rightarrow u_m \leq u_n$

(autrement dit, elle est croissante comme fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$)

En effet, on peut écrire $u_m \leq u_{m+1} \leq u_{m+2} \leq \dots \leq u_{n-1} \leq u_n$.

② comme pour les fonctions, une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée si et seulement si $|u_n|$ est majorée.

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites, et $\lambda \in \mathbb{R}$.
On peut former les suites

$(u_n v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (produit des suites)
$(u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (somme des suites)
$(\lambda u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (multiplication par le réel λ.

"à partir d'un certain rang"

Une propriété $P(n)$ $(n\in\mathbb{N})$ est vraie "à partir d'un certain rang" pour une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 \quad P(n) \text{ est vraie}$$

Exemple : $u_n = 2^n - 10n$ $(u_n)_{n\geq 0}$

La suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est croissante à partir d'un certain rang :

$$u_{n+1} - u_n = \left(2^{n+1} - 10(n+1)\right) - \left(2^n - 10n\right)$$
$$= 2^n - 10 \quad \geq 0 \text{ si } n \geq 4.$$

Suites classiques

- Suite arithmétique de progression $r \in \mathbb{R}$

Elle est donnée par un premier terme $u_0 \in \mathbb{R}$ et la relation de récurrence $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = u_n + r$

On a alors $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = u_0 + nr$

et $$\sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n} u_0 + kr = (n+1)u_0 + r\,\frac{n(n+1)}{2}$$

• Suite géométrique de raison $q \in \mathbb{R}^*$

Elle est donnée par un premier terme $u_0 \in \mathbb{R}$ et la relation de récurrence $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = q u_n$

On a alors $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = u_0 q^n$

et
$$\sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n} u_0 q^k = \begin{cases} (n+1) u_0 & \text{si } q = 1 \\ u_0 \dfrac{q^{n+1}-1}{q-1} & \text{si } q \neq 1 \end{cases}$$

• Suite arithmético-géométrique

Soit $r \in \mathbb{R}$ et $q \in \mathbb{R}^*$. On la définit par récurrence par la formule
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = q u_n + r.$$

Si $q = 1$, c'est une suite arithmétique. On suppose donc $q \neq 1$.

Pour trouver l'expression de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, on résout $a = qa + r$
$$\iff a = \frac{r}{1-q}$$

et on a
$$u_{n+1} - a = q u_n + r - a$$
$$= q u_n + r - (qa + r) = q(u_n - a)$$

donc la suite $(u_n - a)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison q

$$\boxed{u_n = a + (u_n - a) = a + q^n (u_0 - a)}$$

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n} a + q^n (u_0 - a) = (n+1) a + (u_0 - a) \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}$$

B3.2 Convergence d'une suite

Voici la définition la plus importante du cours

Définition Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite et $l \in \mathbb{R}$.

On dit que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ tend vers l si

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n \in \mathbb{N} \ (n \geq N \Rightarrow |u_n - l| \leq \varepsilon)$

ce N dépend de ε car le ∃ est après le ∀

On note alors $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} l$ ou $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = l$;

on dit aussi que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ a pour limite l

Remarquons que $|u_n - l| \leq \varepsilon$ équivaut à $u_n \in [l-\varepsilon, l+\varepsilon]$.

Ainsi, la convergence de (u_n) vers l revient à dire que tout intervalle $[l-\varepsilon, l+\varepsilon]$ $(\varepsilon > 0)$ contient les termes de (u_n) à partir d'un certain rang.

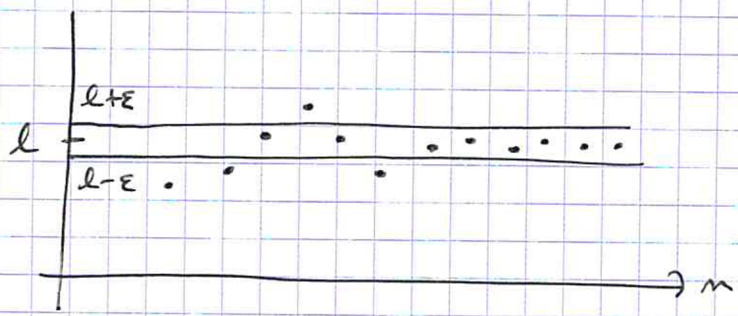
Exemple La suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N} \ u_n = \frac{1}{n+1}$ converge vers 0.

Preuve Soit $\varepsilon > 0$ $\quad |u_n - 0| \leq \varepsilon \iff \frac{1}{n+1} \leq \varepsilon \iff n+1 \geq \frac{1}{\varepsilon}$

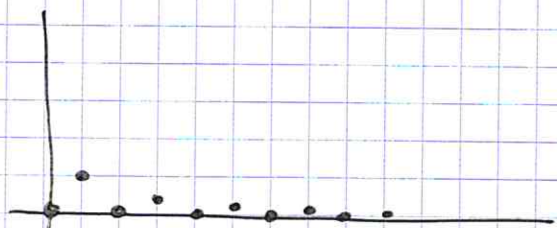
Posons $N = E\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$ si $n \geq N$ alors $n+1 \geq N+1 \geq \frac{1}{\varepsilon}$

donc $\frac{1}{n+1} \leq \varepsilon$

Ainsi le choix $N = E\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$ convient graphiquement, on peut représenter la convergence comme suit



Autre exemple : Posons $u_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est pair} \\ \frac{1}{n} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$



Alors $(u_n)_{n \geq 0}$ tend vers 0.

Preuve : soit $\varepsilon > 0$ et posons $N = E(\frac{1}{\varepsilon}) + 1$

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N$.

si n est pair, alors $u_n = 0$ donc $|u_n - 0| \leq \varepsilon$

si n est impair, $n \geq N \geq \frac{1}{\varepsilon}$

donc $\frac{1}{n} \leq \varepsilon$ et $|u_n - 0| \leq \varepsilon$

On a montré (par disjonction de cas) que

$$n \geq N \Rightarrow |u_n - 0| \leq \varepsilon$$

Ainsi $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = 0$.

Définition Soit (u_n) une suite

S'il existe $l \in \mathbb{R}$ tel que (u_n) converge vers l, on dit que u_n **converge**

Sinon, on dit que (u_n) **diverge**.