Soit $\varepsilon > 0$.

Posons $\varepsilon_1 = \dfrac{\varepsilon}{|\alpha| + |\beta|}$

Par définition de la convergence,

$$\exists N_1 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N_1 \qquad |u_n - l_1| \leq \varepsilon_1$$

$$\exists N_2 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N_2 \qquad |v_n - l_2| \leq \varepsilon_1.$$

Posons $N = \max(N_1, N_2)$. Alors pour tout $n \geq N$ on a à la fois

$$|u_n - l_1| \leq \varepsilon_1 \text{ et } |v_n - l_2| \leq \varepsilon_1.$$

On en déduit

$$\begin{aligned}
|\alpha u_n + \beta v_n - (\alpha l_1 + \beta l_2)| &\leq |\alpha u_n - \alpha l_1| + |\beta u_n - \beta l_2| \\
&\leq |\alpha||u_n - l_1| + |\beta| |u_n - l_2| \\
&\leq |\alpha| \varepsilon_1 + |\beta| \varepsilon_1 \\
&\leq \varepsilon
\end{aligned}$$

d'où le résultat.

<u>Théorème</u> (produit)

Soient $(u_n)_{n \geq 0}$ et $(v_n)_{n \geq 0}$ deux suites réelles.

On suppose que $u_n \xrightarrow[n \to \infty]{} l_1$ et $v_n \xrightarrow[n \to \infty]{} l_2$

Alors $u_n v_n \xrightarrow[n \to \infty]{} l_1 l_2$

<u>Preuve</u> Puisque $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente, elle est bornée :

$$\exists M > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad |u_n| \leq M.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Posons $\varepsilon_1 = \dfrac{\varepsilon}{M + |l_2|}$

Par définition de la convergence,

$$\exists N_1 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N_1 \qquad |u_n - l_1| \leq \varepsilon_1$$

$$\exists N_2 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N_2 \qquad |v_n - l_2| \leq \varepsilon_1$$

Posons $N = \max(N_1, N_2)$. Pour $n \geq N$ on a à la fois

$$|u_n - l_1| \leq \varepsilon_1 \quad \text{et} \quad |v_n - l_2| \leq \varepsilon_1.$$

On écrit
$$\begin{aligned} |u_n v_n - l_1 l_2| &= |u_n v_n - u_n l_2 + u_n l_2 - l_1 l_2| \\ &\leq |u_n v_n - u_n l_2| + |u_n l_2 - l_1 l_2| \\ &\leq |u_n| . |v_n - l_2| + |l_2| . |u_n - l_1| \\ &\leq M\varepsilon_1 + |l_2|\varepsilon_1 \\ &\leq \varepsilon \end{aligned}$$

d'où le résultat.

__Théorème__ (inverse)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite qui ne s'annule pas ($\forall n \in \mathbb{N}\ u_n \neq 0$).
On suppose que $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} l$ avec $l \neq 0$
Alors $\dfrac{1}{u_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \dfrac{1}{l}$

⚠ On peut avoir $\forall n\ u_n \neq 0$ et $u_n \longrightarrow 0$.

__Preuve__ On écrira $\left|\dfrac{1}{u_n} - \dfrac{1}{l}\right| = \left|\dfrac{u_n - l}{u_n l}\right| = \dfrac{|u_n - l|}{|u_n| . |l|}$

Il faut donc ~~majorer~~ minorer u_n.
Appliquons la définition avec $\varepsilon = \dfrac{|l|}{2} > 0$
$\exists N_1 \in \mathbb{N}\quad \forall n \geq N_1 \qquad |u_n - l| \leq \dfrac{|l|}{2}$

$$|u_n| \geq |l| - |u_n - l| \geq |l| - \frac{|l|}{2} = \frac{|l|}{2}.$$

__Soit $\varepsilon > 0$__ Posons $\varepsilon_1 = \frac{1}{2}\varepsilon |l|^2 > 0$
Par définition de la convergence,
$\exists N_2 \in \mathbb{N}\quad \forall n \geq N_2 \quad |u_n - l| \leq \varepsilon_1$

$\dfrac{1}{|u_n|} \leq \dfrac{2}{|l|}$
$\Uparrow$
$|u_n| \geq \dfrac{|l|}{2}$

Posons $N = \max(N_1, N_2)$. Alors pour tout $n \geq N$ on a $|u_n - l| \leq \varepsilon_1$
~~$|u_n - l| \leq \frac{|l|}{2}$~~

$$\left|\frac{1}{u_n} - \frac{1}{l}\right| = \frac{|u_n - l|}{|u_n| \cdot |l|} \leq \frac{2\varepsilon_1}{|l|^2} = \varepsilon$$ d'où le résultat.

Suites et inégalités

On peut passer à la limite dans les inégalités **larges** ①

Théorème Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites vérifiant

- $\forall n\in\mathbb{N} \quad u_n \leq v_n$
- $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l_1$
- $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l_2$

Alors $l_1 \leq l_2$

Preuve Supposons par l'absurde que $l_1 > l_2$

Posons $\varepsilon = \dfrac{l_1 - l_2}{3} > 0$.

Par définition de la convergence, ~~il ex~~

$$\exists N_1 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N_1 \quad u_n \geq l_1 - \varepsilon$$

$$\exists N_2 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N_2 \quad v_n \leq l_2 + \varepsilon$$

Posons $N = \max(N_1, N_2)$. Alors

$$u_N \geq l_1 - \varepsilon = l_2 + 2\varepsilon > l_2 + \varepsilon \geq v_N$$

donc $u_N > v_N$, ce qui est une contradiction.

Donc $l_1 \leq l_2$ ∎

Corollaire Si une suite $(u_n)_n$ converge vers l

(1) Si $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n \leq M$ alors $l \leq M$

(2) Si $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n \geq m$ alors $l \geq m$

Preuve : on applique le théorème précédent avec une des deux suites constante

Théorème « des gendarmes » (1)

Soient $(u_n)_n$, $(v_n)_n$, $(w_n)_n$ trois suites telles que $\forall n \in \mathbb{N}$ $\quad u_n \leq v_n \leq w_n$.

On suppose que $(u_n)_n$ et $(w_n)_n$ convergent vers $l \in \mathbb{R}$.

Alors $(v_n)_n$ converge vers l.

Exemple Soit pour $n \in \mathbb{N}^*$ $\quad v_n = \frac{\sin n}{n}$

On a $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\quad -1 \leq \sin n \leq 1$

donc $\quad -\frac{1}{n} \leq v_n \leq \frac{1}{n}$

Comme $\lim\limits_{n\to\infty} \underbrace{-\frac{1}{n}}_{u_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \underbrace{\frac{1}{n}}_{w_n} = 0$, le théorème des gendarmes implique que $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = 0$

Preuve Soit $\varepsilon > 0$.

Comme $u_n \to l$, $\exists N_1 \in \mathbb{N}$ $\forall n \geq N_1$ $\quad |u_n - l| \leq \varepsilon$

(et donc $u_n \geq l - \varepsilon$)

Comme $w_n \to l$, $\exists N_2 \in \mathbb{N}$ $\forall n \geq N_2$ $\quad |w_n - l| \leq \varepsilon$

(et donc $w_n \leq l + \varepsilon$)

Soit $N = \max(N_1, N_2)$. $\forall n \geq N$ on a $n \geq N_1$ et $n \geq N_2$,

donc $\quad l - \varepsilon \leq u_n \leq v_n \leq w_n \leq l + \varepsilon$,

donc $\quad v_n \in [l-\varepsilon, l+\varepsilon]$, c'est à dire ~~$v_n \in$~~ $|v_n - l| \leq \varepsilon$.

On a montré $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = l$.

On prendra garde à vérifier toutes les hypothèses

~~1 encadrement~~ (1) encadrement

(2) convergence des "gendarmes" vers la même limite.

Convergence et monotonie

Il existe des suites...

... convergentes et non monotones (ex : $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$, tend vers 0 par le th. des gendarmes

... monotones et non convergentes (par ex. $u_n = n^2$)

Théorème • Toute suite croissante majorée converge
• Toute suite décroissante minorée converge

La preuve utilise la propriété de la borne supérieure

Soit $A \subset \mathbb{R}$. $M \in \mathbb{R}$ est un majorant de A si $\forall x \in A \quad x \leq M$

Ex $A =]\infty, 0[$ $M = 1$ est un majorant de A
$M = 0$ est aussi un majorant de A

La borne supérieure de A (notée $\sup A$) est le plus petit des majorants.

Théorème (admis) : toute partie non vide majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure

⚠ $\sup A$ n'est pas forcément dans A.

Si $A =]-\infty, 0[$, $\sup A = 0 \notin A$

Si $B = [0,1]$ $\sup B = 1 \in B$

(de même on définit la borne inférieure de A comme le plus grand des minorants) (notée $\inf A$)

Remarque : il n'est pas vrai que la borne supérieure d'une partie de $\mathbb{Q}$ est dans $\mathbb{Q}$

Ex $A = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 \leq 2\}$ $\sup A = \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Preuve du théorème (toute suite croissante majorée converge)

- Soit $(u_n)_n$ une suite croissante majorée. Alors $\exists M \in \mathbb{R}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_n \leq M$.

Posons $A = \{u_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$.

M est un majorant de A. Par le théorème admis, A admet une borne supérieure. Posons $l = \sup A$.

Comme l est un majorant de A on a $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_n \leq l$.

Soit $\varepsilon > 0$. $l - \varepsilon < l$ donc $l - \varepsilon$ n'est pas un majorant de A.

Ainsi $\exists N \in \mathbb{N}$ tel que $u_N > l - \varepsilon$.

Comme $(u_n)_n$ est croissante, on a $\forall n \geq N$

$$l \geq u_n \geq u_N > l - \varepsilon \quad \text{donc} \quad |u_n - l| \leq \varepsilon$$

On a montré $\lim u_n = l$.

- Soit (v_n) une suite décroissante minorée. Posons $u_n = -v_n$. Alors (u_n) est croissante majorée, donc converge par le premier cas. Ainsi $\exists l \in \mathbb{R}$ tq $\lim u_n = l$, donc $\lim v_n = -l$.