Suites adjacentes

(1)

Théorème des suites adjacentes

Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites réelles telles que

(1) $(u_n)_n$ est croissante
(2) $(v_n)_n$ est décroissante
(3) $(v_n - u_n)_n$ converge vers 0

Alors les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ convergent vers la même limite

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} v_n = l \quad , \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leq l \leq v_n$$

Remarque Si on sait que $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ convergent, alors (3) implique que $\lim u_n = \lim v_n$.

Cependant, (3) n'implique pas que (u_n) et (v_n) convergent.

considérons $u_n = n$ $\quad v_n = n + \frac{1}{n}$

(1) et (3) sont vérifiés, pas (2), et (u_n) et (v_n) divergent.

⚠ Si on suppose que $\lim_{n\to\infty} (v_n - u_n) = 0$, on n'a pas le droit d'écrire $\lim_{n\to\infty} v_n = \lim_{n\to\infty} u_n$ si on n'a pas montré la convergence

Preuve Soit $w_n = v_n - u_n$; $(w_n)_n$ est décroissante comme somme des suites décroissantes $(v_n)_n$ et $(-u_n)_n$.

Par (3), on a $\lim_{n\to\infty} w_n = 0$.

Comme $(w_n)_n$ décroît vers 0, on a $w_n \geq 0$ pour tout n,

c'est à dire $u_n \leq v_n$.

Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}$ $\quad u_0 \leq u_n \leq v_n \leq v_0 \quad (*)$

les suites $(u_n)_n$ ~~[illegible]~~ et (v_n) sont monotones et bornées, donc convergentes par le théorème précédent

Posons $l_1 = \lim_{n\to\infty} u_n$ et $l_2 = \lim_{n\to\infty} v_n$

Alors $0 = \lim_{n\to\infty} w_n = \lim_{n\to\infty} (v_n - u_n) = \lim_{n\to\infty} v_n - \lim_{n\to\infty} u_n = l_2 - l_1$, donc $l_1 = l_2$

Comme $\boxed{(*)}$ $\forall n \quad u_n \leq v_n$,

on a en passant à la limite d'un côté ou de l'autre

$\forall n \quad l \leq v_n$ et $u_n \leq l$

__Exemple__ : Moyenne arithmético-géométrique

__Soient__ $a, b > 0$.

$\frac{a+b}{2}$ est la moyenne "arithmétique" (usuelle)

$\sqrt{ab}$ est la moyenne "géométrique".

On a $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$ $(*)$ car $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$

$$\sqrt{a}^2 - 2\sqrt{a}\sqrt{b} + \sqrt{b}^2$$

donc $a + b \geq 2\sqrt{ab}$.

Supposons $a \leq b$

On définit deux suites (u_n) et (v_n) par récurrence

$$\begin{cases} u_0 = a \\ v_0 = b \end{cases} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \begin{cases} u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \\ v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} \end{cases}$$

~~Tout Fort~~ Montrons que $(u_n)_n$ et (v_n) sont adjacentes

(1) (u_n) croissante ?

(2) (v_n) décroissante ?

On a $\forall n \quad u_n \leq v_n$: si $n = 0$ c'est parce que $a \leq b$

si $n > 0$ c'est $*$ appliqué avec $a = u_{n-1}$ $b = v_{n-1}$.

On en déduit

- $u_n^2 \leq u_n v_n$ (car $u_n \geq 0$)

d'où $u_n \leq \sqrt{u_n v_n} = u_{n+1}$

et $\underbrace{\frac{u_n+v_n}{2}}_{v_{n+1}} \le \frac{v_n+v_n}{2} = v_n$.

(3) $\forall n \in \mathbb{N}$ $\quad v_{n+1}-u_{n+1} \le v_{n+1}-u_n \quad$ (car $u_n \le u_{n+1}$)

$$= \frac{u_n+v_n}{2} - u_n$$

$$= \frac{v_n-u_n}{2}$$

On en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}$ $\quad \underbrace{v_n-u_n \le \frac{b-a}{2^n}}_{P_n}$

En effet P_0 est vraie

et, si on suppose P_n, $\quad v_{n+1}-u_{n+1} \le \frac{v_n-u_n}{2} \le \frac{1}{2}\frac{b-a}{2^n} = \frac{b-a}{2^{n+1}}$

On a $\quad \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{0} \le v_n-u_n \le \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{\frac{b-a}{2^n}}$

et le théorème des gendarmes implique $\lim\limits_{n\to\infty}(v_n-u_n)=0$.

Ainsi $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ vérifient (1)-(2)-(3) ; ce sont des suites adjacentes qui convergent donc vers la même limite ℓ, qui s'appelle la moyenne arithmético-géométrique de a et b.

Suites extraites ou sous-suites

Principe : On a une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$; on ne garde que certains termes (en nombre infini) pour former une nouvelle suite qu'on appelle suite extraite ou sous-suite de $(u_n)_n$

Exemple

$$\left.\begin{array}{l} (u_{2n})_{n\in\mathbb{N}} \\ (u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}} \\ (u_{3n})_{n\in\mathbb{N}} \end{array}\right\} \text{ sont des sous-suites de } (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

Voici la définition précise

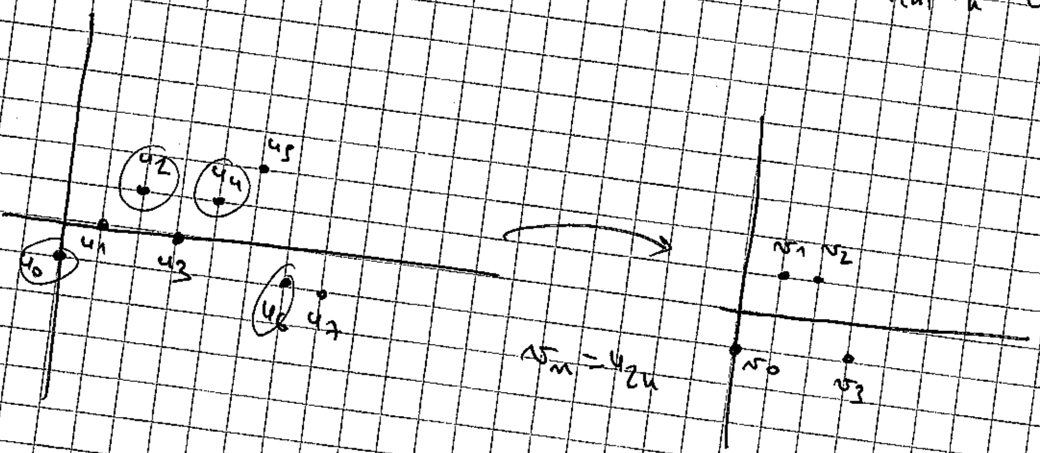
Définition Une extraction est une fonction $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante.

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite et φ une extraction, on dit que la suite $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite extraite ou une sous-suite de (u_n)

Propriétés Soit ~~$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$~~ $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ une sous-suite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

- Si $(u_n)_n$ est croissante, alors $(u_{\varphi(n)})_n$ est croissante
- ——— décroissante, ——— décroissante
- ——— majorée, ——— majorée
- ——— minorée, ——— minorée
- Si $(u_n)_n$ converge vers l, alors $(u_{\varphi(n)})_n$ converge vers l

(exercices)



$v_n = u_{2n}$

Important : Même quand $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas, il se peut qu'une sous-suite converge.

EX $u_n = (-1)^n$

C'est la suite $(1, -1, 1, -1, 1, -1, \ldots)$ qui ne converge pas.

La sous-suite $(u_{2n})_n$ converge vers 1 (elle est constante égale à 1)

——— $(u_{2n+1})_n$ ——— -1 (elle est constante égale à -1)

Proposition Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite. Alors
$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge $\Leftrightarrow$ les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers la même limite.

$\Rightarrow$ conséquence de la propriété précédente
$\Leftarrow$ exercice

Théorème de RAMSEY Toute suite admet une sous-suite monotone

Preuve Soit (u_n) une suite
et $E = \{ n\in\mathbb{N} \quad \forall m>n \quad u_m \leq u_n \}$

1er cas E est fini, donc majoré par un entier N

(*) $\forall n>N \quad n\notin E$ donc $\exists m>n \quad u_m>u_n$

On définit alors par récurrence une extraction $\varphi : \mathbb{N}\to\mathbb{N}$
par $\varphi(0)=N+1$
et, étant donnés $\varphi(0)<\varphi(1)<\dots<\varphi(k)$,
on choisit $\varphi(k+1)$ tel que $u_{\varphi(k+1)}>u_{\varphi(k)}$
[Possible par (*), puisque $\varphi(k)>N$ donc $\varphi(k)\notin E$]
On a construit une sous-suite $(u_{\varphi(n)})_n$ strictement croissante

2ème cas E est infini. On peut donc l'écrire
$E = \{\varphi(0), \varphi(1), \dots\}$ pour une extraction φ ($\varphi(0)<\varphi(1)<\dots$)

donc $\forall k\in\mathbb{N}$
$$\left.\begin{array}{l}\varphi(k)\in E\\ \varphi(k+1)>\varphi(k)\end{array}\right\} \Rightarrow u_{\varphi(k+1)}\leq u_{\varphi(k)}$$
par définition de E

Ainsi $(u_{\varphi(n)})_n$ est une sous-suite décroissante.