Théorème de BOLZANO-WEIERSTRASS

Toute suite bornée admet une sous-suite convergente.

Autrement dit : si $(u_n)_n$ est bornée, il existe une extraction φ telle que $(u_{\varphi(n)})_n$ converge.

Exemple $u_n = (-1)^n$ $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ conviennent

$u_n = \cos(n)$ il n'est pas facile de donner un exemple de sous-suite qui converge, mais on sait qu'il en existe par le théorème de B-W.

(Remarque : en fait, $\forall \ell \in [-1,1]$, il existe une extraction φ telle que $\lim\limits_{n\to\infty} u_{\varphi(n)} = \ell$)

Preuve Soit $(u_n)_n$ une suite bornée. Par le théorème de RAMSEY, il existe une extraction φ telle que $(u_{\varphi(n)})_n$ est monotone.

Comme $(u_{\varphi(n)})_n$ est monotone et bornée, elle converge.

Limites infinies

Définition Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite.

On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ si

$\forall A\in\mathbb{R}\quad \exists N\in\mathbb{N}\qquad n\geq N \Rightarrow u_n \geq A$

On écrit alors $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty$

⚠ NE PAS UTILISER "(u_n) converge vers $+\infty$"

le mot "converge" est réservé aux limites finies

Définition Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite.

On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $-\infty$ si

$\forall A\in\mathbb{R}\quad \exists N\in\mathbb{N}\qquad n\geq N \Rightarrow u_n \leq A$

On écrit alors $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = -\infty$

<u>théorème</u> Soit $(u_n)_n$ une suite croissante. Il y a deux possibilités

- ou bien $(u_n)_n$ converge
- ou bien $(u_n)_n$ tend vers $+\infty$

<u>Preuve</u> : • <u>Si (u_n) est majorée</u>, elle converge

(toute suite croissante majorée converge)

• <u>Si (u_n) n'est pas majorée</u>

Soit $A \in \mathbb{R}$. Comme $(u_n)_n$ n'est pas majorée par A,

il existe N tel que $u_N > A$

Comme $(u_n)_n$ est croissante

$\forall n \geq N \quad u_n \geq u_N > A$

ce qui montre $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = +\infty$ ∎

Encore un exemple de suite !!

$u_n = n(-1)^n$ $\quad u_n$ n'est pas bornée, mais ne tend ni vers $+\infty$ ni vers $-\infty$

On a $\lim\limits_{n \to \infty} u_{2n} = +\infty$ et $\lim\limits_{n \to \infty} u_{2n+1} = -\infty$

<u>théorèmes de comparaison</u>

① Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites vérifiant

- $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leq v_n$

et

- $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

ALORS $\lim\limits_{n \to \infty} v_n = +\infty$

② Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites vérifiant

- $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leq v_n$

et

- $\lim_{n\to+\infty} v_n = -\infty$

Alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$

C'est la version "∞" du théorème des gendarmes.

FORMES INDETERMINEES (F.I.)

Les résultats vus sur la somme / le produit de suites convergentes ne s'étendent pas forcément au cas de suites tendant vers $+\infty$ ou $-\infty$

SOMME (ici $l \in \mathbb{R}$)

HYPOTHESES		CONCLUSION
$\lim_{n\to+\infty} u_n$	$\lim_{n\to+\infty} v_n$	$\lim_{n\to+\infty} (u_n+v_n)$
l	$+\infty$	$+\infty$
l	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$-\infty$	F.I. on ne peut pas conclure

De même, les différences "$+\infty$" $-$ "$+\infty$" et "$-\infty$" $-$ "$-\infty$" sont indéterminées

PRODUIT

(ici $l \in \mathbb{R}$)

$\lim_{n\to\infty} u_n$	$\lim_{n\to\infty} v_n$	$\lim_{n\to\infty} u_n v_n$
$l>0$	$+\infty$	$+\infty$
$l<0$	$+\infty$	$-\infty$
0	$+\infty$	F.I.
$l>0$	$-\infty$	$-\infty$
$l<0$	$-\infty$	$+\infty$
0	$-\infty$	F.I.
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$

QUOTIENT

$\lim_{n\to\infty} u_n$	$\lim_{n\to\infty} v_n$	$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n}$
$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$	F.I.
0	0	F.I.
0	$+\infty$	0
0	$-\infty$	0
$+\infty$	0	F.I.
$-\infty$	0	F.I.

← on suppose $\forall n \in \mathbb{N}\ v_n \neq 0$ pour que ce soit bien défini

} peuvent être levées si on connaît le signe de v_n

si $v_n > 0$ $\begin{cases} \lim u_n = +\infty \\ \lim v_n = 0 \end{cases}$

impliquent $\lim \frac{u_n}{v_n} = +\infty$

Quand on a une forme indéterminée, la suite correspondante peut

- converger vers n'importe quelle limite
- tendre vers $+\infty$ ou $-\infty$
- autre.

ex $\quad u_n = n \quad v_n = n + 42 \quad v_n - u_n = 42 \longrightarrow 42$

$v_n' = n - \sqrt{n} \quad v_n' - u_n = -\sqrt{n} \longrightarrow -\infty$

$v_n'' = n + (-1)^n \quad v_n'' - u_n = (-1)^n$ ne converge pas

Une autre F.I. est "1^{∞}"

si $\lim u_n = 1$ $\lim v_n = +\infty$

On ne peut pas conclure quand à la limite de $u_n^{v_n}$

En effet $u_n^{v_n} = \exp(\underset{\substack{\downarrow \\ +\infty}}{v_n} . \underbrace{\ln(u_n)}_{\to 0})$

et on retrouve la F.I "$+\infty \times 0$".

Chapitre 7 ARITHMETIQUE

arithmétique = étude de la division dans $\mathbb{Z}$ et des nombres premiers.

Définition Soient $a, b \in \mathbb{Z}$

On dit que a est multiple de b (ou que b est diviseur de a)

si $\exists k \in \mathbb{Z}$ tel que $a = b.k$

Ex 6 est multiple de 3 3 est diviseur de 6

6 est multiple de -2 -2 est diviseur de 6

Définition On dit que $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$ est premier

si ses seuls diviseurs positifs sont 1 et p

Ex : 6 n'est pas premier (2 et 3 sont des diviseurs positifs autres que 1 et 6)

2, 3, 5, 7, 11, 13 ... sont premiers

⚠ 1 n'est pas premier
les nombres premiers sont ≥ 2.

Théorème (EUCLIDE) Il existe une infinité de nombres premiers