Produit de deux Σ = somme double

On a $$\left(\sum_{i=m}^{n} a_i\right)\left(\sum_{j=p}^{q} b_j\right) = \sum_{\substack{m\leq i\leq n\\ p\leq j\leq q}} a_i b_j$$

Exemple $(a_1+a_2)(b_1+b_2+b_3) = a_1b_1 + a_1b_2 + a_1b_3 + a_2b_1 + a_2b_2 + a_2b_3$

Sommes classiques

Proposition (à connaître)

Pour tout entier n, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = 1+2+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$

Preuve : $$2\sum_{k=1}^{n} k = \begin{array}{ccccccccc} 1 & + & 2 & + & 3 & + \dots & + & (n-1) & + \; n \\ & & & & & & & & + \\ n & + & (n-1) & + & (n-2) & + \dots & + & 2 & + \; 1 \end{array}$$

On somme une grille avec 2 lignes et n colonnes. Dans chaque colonne, la somme vaut $n+1$

Donc $\displaystyle 2\sum_{k=1}^{n} k = n(n+1)$

Proposition Pour tout entier n

① $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

② $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$

Preuve de ① (Exercice : faire pareil pour ②)

Par récurrence sur n

Soit pour $n \in \mathbb{N}^*$ l'énoncé P_n

$$\text{« } \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \text{ »}$$

- <u>Initialisation</u> $\displaystyle\sum_{k=1}^{1} k^2 = 1^2 = 1$

$$\frac{1(1+1)(2 \cdot 1+1)}{6} = \frac{1 \times 2 \times 3}{6} = 1$$ donc l'énoncé P_1 est vrai

- <u>Hérédité</u>

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, supposons P_n vrai et déduisons-en P_{n+1}

On a $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

On écrit
$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)^2$$
$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2$$
$$= \frac{n+1}{6}\left[n(2n+1) + 6(n+1)\right]$$
$$= \frac{n+1}{6}\left[2n^2 + 7n + 6\right]$$
$$= \frac{n+1}{6}\left[(n+2)(2n+3)\right]$$
$$= \frac{(n+1)(n+1+1)(2 \cdot (n+1)+1)}{6}$$

donc P_{n+1} est vrai

Par récurrence, on a montré que P_n est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

Sommes à connaître (suite)

Somme d'une suite géométrique

Proposition : soit a un réel différent de 1. Alors pour tout entier n,

$$\sum_{k=0}^{n} a^k = 1 + a + \dots + a^n = \frac{a^{n+1}-1}{a-1}$$

(ne pas oublier ~~d'indiquer~~ d'indiquer $a \neq 1$ sinon ~~ton~~ on tombe dans le piège de la division par 0.

Si $a = 1$ on a simplement $\sum_{k=0}^{n} a^k = \sum_{k=0}^{n} 1 = n+1$.

Preuve

$$\begin{aligned}(a-1)\sum_{k=0}^{n} a^k &= \sum_{k=0}^{n} \left(a^{k+1} - a^k\right) \\ &= \sum_{k=0}^{n} a^{k+1} - \sum_{k=0}^{n} a_k \\ &= a^{n+1} - a^0 \\ &= a^{n+1} - 1\end{aligned}$$

~~Série~~ Somme télescopique !

d'où le résultat en divisant par $a-1$, qui est non nul.

Une autre formule à connaître est la formule de factorisation suivante :

Proposition : soient a, b des réels et $n \in \mathbb{N}$. Alors

$$a^n - b^n = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} b^k = (a-b)\left(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + b^{n-1}\right)$$

Exemples

$n=2 \qquad a^2-b^2=(a-b)(a+b)$

$n=3 \qquad a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

$n=4 \qquad a^4-b^4=(a-b)(a^3+a^2b+ab^2+b^3)$

etc $\qquad \vdots$

<u>Remarque</u> : si on fait $b=1$, on retrouve la proposition précédente.

<u>Preuve</u>

$$(a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k}b^k$$
$$= \sum_{k=0}^{n-1}\left(a^{n-k}b^k - a^{n-1-k}b^{k+1}\right)$$
$$= \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-k}b^k - \sum_{l=1}^{n} a^{n-l}b^l$$

Changement d'indice $l=k+1$ dans la $2^{\text{ème}}$ somme

$$= a^n - b^n.$$

<u>Produits</u> On utilise le symbole $\prod$ pour noter les produits de la même façon qu'on utilise le symbole Σ pour noter les sommes.

On a donc

<u>Notation</u> Soient $m \leq n$ des entiers et $a_m, a_{m+1}, \dots, a_n$ des réels.

On pose $\displaystyle\prod_{k=m}^{n} a_k = a_m \times a_{m+1} \times \dots \times a_n$

Lorsque $m>n$, on pose $\displaystyle\prod_{k=m}^{n} a_k = 1$

(convention naturelle : si on multiplie des nombres dans une boucle FOR, il faut initialiser à 1)

Un cas ~~exp~~ particulier et important de produit est la factorielle

<u>Définition</u> Soit n un entier naturel.
On appelle " factorielle n " et on note " $n!$ "
le nombre

$$n! = \prod_{k=1}^{n} k = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times n.$$

On a donc
$$0! = 1$$
$$1! = 1$$
$$2! = 2$$
$$3! = 6$$
$$4! = 24$$
$$5! = 120$$
$$\vdots$$

(ça augmente <u>très</u> vite)

Soit L une liste de n éléments distincts.
Alors $n!$ est le nombre de façons d'ordonner la liste.

A1.5 Coefficients binomiaux

Les factorielles apparaissent notamment dans les coefficients binomiaux.

<u>Définition</u> Soient k, n des entiers naturels vérifiant $k \leq n$.
On pose
$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{k.(k-1)\ldots 1}$$

Les nombres $\binom{n}{k}$ s'appellent "coefficients binomiaux".

$\binom{n}{k}$ se lit "k parmi n".

<u>Proposition</u> Soit $0 \leq k \leq n$ des entiers
et E un ensemble à n éléments.
Alors $\binom{n}{k}$ est le nombre de sous-ensembles de E à k éléments

En particulier, $\binom{n}{k}$ est un nombre entier, ce qui n'est pas évident puisqu'il est défini comme une fraction.

<u>Preuve</u> : pour déterminer une partie à k éléments de E

- on choisit un ~~1~~ 1er élément $\rightarrow$ n choix
- ———— 2ème ———— $\rightarrow$ $(n-1)$ choix

⋮

- ———— $k$ème ———— $\rightarrow$ $(n-k+1)$ choix

Mais cette procédure compte plusieurs fois chaque sous-ensemble $F \subset E$ à k éléments. Plus exactement, chaque F est compté $k!$ fois, autant que le nombre de façons d'ordonner F.

~~Le ensemble~~

Le nombre de sous-ensembles est donc

$$\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} = \binom{n}{k}$$