## B 1.8 Cardinaux

On dit qu'un ensemble $E$ est fini s'il existe un entier $n$ et une bijection $f : E \to \{1, \dots, n\}$.
On écrit alors $\mathrm{card}(E) = n$

cardinal = nombre d'éléments. Si $E$ n'est pas fini, on pose $\mathrm{card}(E) = \infty$

$\mathrm{card}(\emptyset) = 0$

Si $A \subset B$ alors $\mathrm{card}(A) \leq \mathrm{card}(B)$

Si $A \cap B = \emptyset$ alors $\mathrm{card}(A \cup B) = \mathrm{card}(A) + \mathrm{card}(B)$

**Proposition** Soient $E$ et $F$ deux ensembles finis et $f : E \to F$ une application

1. Si $f$ est injective, alors $\mathrm{card}(E) \leq \mathrm{card}(F)$
2. Si $f$ est surjective, alors $\mathrm{card}(E) \geq \mathrm{card}(F)$
3. Si $f$ est bijective, alors $\mathrm{card}(E) = \mathrm{card}(F)$

## Compléments sur la valeur absolue

Soit $a \in \mathbb{R}$. La valeur absolue de $a$ est définie par

$$|a| = \begin{cases} a & \text{si } a \geq 0 \\ -a & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

Pour $a, b$ réels on a

- $\sqrt{a^2} = |a|$
- $|ab| = |a| . |b|$
- $|a+b| \leq |a| + |b|$ inégalité triangulaire
- $|a-b| \geq \big| |a| - |b| \big|$ " " inverse

## Partie positive, partie négative

Pour un réel $a$, on note

$$a^+ = \begin{cases} a & \text{si } a \geq 0 \\ 0 & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

$$a^- = \begin{cases} 0 & \text{si } a \geq 0 \\ -a & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

Les nombres $a^+$ et $a^-$ sont toujours $\geq 0$.

On a alors $a^+ + a^- = |a|$

et

$a^+ - a^- = a$

Chapitre 3 ~~A2~~ Logique 

Dans ce chapitre on essaye (un tout petit peu) de formaliser la notion de <u>preuve</u> mathématique

## 3.1 ~~A2.1~~ Prédicats et assertions

<u>Assertion</u> : affirmation (mathématique) qui peut être $\overbrace{\text{vrai (V) ou fausse (F)}}^{\text{c'est sa "valeur de vérité"}}$

<u>Exemple</u> : « 8 est un entier pair » (c'est <u>vrai</u>)

« tout nombre entier est rationnel » (c'est <u>faux</u>)

« pour tout entier $n$, $2n+1$ est impair » (c'est vrai)

« mon numéro de téléphone (carte bleue) apparaît dans les décimales de $\pi$ » (on ne sait pas si c'est vrai ou si c'est faux)

<u>Maths</u> : déterminer les assertions vraies et les assertions fausses.

<u>Prédicat</u> : variante d'assertion, où il apparaît une ou plusieurs variables. Du coup, ~~la~~ sa "valeur de vérité" peut dépendre de ce que vaut cette variable.

<u>EX</u> : « l'entier $n$ est pair » (vrai pour $n=2$ / faux pour $n=3$)

« pour tout entier $n$, $2n+m$ est pair » (vrai pour $m=2$ / faux pour $m=1$)

⋮

## 3.2 ~~A2~~ Opérations logiques sur les prédicats

Soient P et Q des prédicats. On définit de nouveaux prédicats à l'aide de "tableaux de vérité"

La négation

| P | non(P) |
|---|---|
| V | F |
| F | V |

Le prédicat non(P) a une valeur de vérité opposé à celle de P

La conjonction (et)

La disjonction (ou)

| P | Q | P et Q | P ou Q |
|---|---|---|---|
| V | V | V | V |
| V | F | F | V |
| F | V | F | V |
| F | F | F | F |

⚠ En maths "P ou Q" veut dire : soit P
soit Q
soit P et Q.

L'équivalence ($\Leftrightarrow$) (SSI)

| P | Q | $P \Leftrightarrow Q$ |
|---|---|---|
| V | V | V |
| V | F | F |
| F | V | F |
| F | F | V |

"$P \Leftrightarrow Q$" est vrai lorsque "P" et "Q" ont la même valeur de vérité

L'implication $\Rightarrow$

| P | Q | $P \Rightarrow Q$ |
|---|---|---|
| V | V | V |
| V | F | F |
| F | V | V |
| F | F | V |

$P \Rightarrow Q$ a la même tableau de vérité que

non(P) ou Q

... bizarre ... ?

"FAUX implique n'importe quoi".

Le prédicat « $P \Rightarrow Q$ » ~~se~~ lit

« $P$ implique $Q$ » ou aussi « si $P$, alors $Q$ ».

Il ne faut pas confondre le « si … alors » du langage courant (qui exprime la cause) et le « si … alors » mathématique (qui exprime l'implication).

Considérons les phrases

$P_1$ : « s'il y a des nuages, alors il pleut »

$P_2$ : « s'il pleut, alors il y a des nuages »

La phrase $P_2$ semble bizarre. Pourtant, la phrase $P_2$ est (mathématiquement) vraie et la $P_1$ est fausse.

↓

« Si j'observe qu'il pleut, je peux logiquement en déduire qu'il y a des nuages »

<u>Quelques formules utiles</u>. Dans chaque ligne, les deux prédicats ont même tableau de vérité.

| | | |
|---|---|---|
| non ($P$ et $Q$) | non($P$) ou non($Q$) | |
| non ($P$ ou $Q$) | non($P$) et non($Q$) | |
| $P$ ou ($Q$ et $R$) | ($P$ ou $Q$) et ($P$ ou $R$) | |
| $P$ et ($Q$ ou $R$) | ($P$ et $Q$) ou ($P$ et $R$) | |
| $P \Rightarrow Q$ | non($Q$) $\Rightarrow$ non($P$) | ← l'implication contraposée |
| $P \Leftrightarrow Q$ | ($P \Rightarrow Q$) et ($Q \Rightarrow P$) | ← équivalence = double implication |
| $P \Leftrightarrow Q$ | non($P$) $\Leftrightarrow$ non($Q$) | |
| $P \Rightarrow$ ($Q$ ~~et~~ $R$) | ($P \Rightarrow Q$) et ($P \Rightarrow R$) | |
| ($P$ ou $Q$) $\Rightarrow R$ | ($P \Rightarrow R$) ~~et~~ ($Q \Rightarrow R$) | |
| non ($P \Rightarrow Q$) | $P$ et non($Q$) | |

## ~~Leçon~~ 3.3 Les quantificateurs $\forall$ et $\exists$

$\forall$ : "pour tout" viennent des lettres A (all)

$\exists$ : "il existe" E (exists) renversées.

On écrit toujours ces symboles ~~dans~~ ~~de~~ la manière suivante

$\forall x \in A \; .... \; P(x)$ $\qquad$ $\exists y \in B \; .... \; Q(y)$

variable — appartient — ensemble — prédicat avec $x$ comme variable.

L'assertion "$\forall x \in A : P(x)$" est <u>vraie</u> si le prédicat $P(x)$ est vrai pour <u>tous</u> les éléments $x$ de $A$.

L'assertion "$\exists x \in A : P(x)$" est <u>vraie</u> si le prédicat $P(x)$ est vrai pour <u>au moins un</u> élément $x$ de $A$.

On rencontre parfois $\exists!$ ~~[illegible]~~ $\exists!$ se lit : « il existe un unique ... tel que... »

L'assertion « $\exists! x \in A : P(x)$ » est vraie si le prédicat $P(x)$ est vrai pour (exactement un / un et un seul) élément $x$ de $A$.