3.3 Les quantificateurs $\forall$ et $\exists$

$\forall$: "pour tout" viennent des lettres A (all)

$\exists$: "il existe" E (exists) renversées.

On écrit toujours ces symboles ~~dans de~~ la manière suivante

$$\forall x \in A \; \ldots \; P(x) \qquad \exists y \in B \; \ldots \; \varphi(y)$$

variable — appartient — ensemble — prédicat avec x comme variable.

L'assertion "$\forall x \in A : P(x)$" est <u>vraie</u> si le prédicat $P(x)$ est vrai pour <u>tous</u> les éléments x de A.

L'assertion "$\exists x \in A : P(x)$" est <u>vraie</u> si le prédicat $P(x)$ est vrai pour <u>au moins un</u> élément x de A.

On rencontre parfois $\exists!$. $\exists!$ se lit : « il existe un unique ... tel que ... »

L'assertion « $\exists! x \in A : P(x)$ » est vraie si le prédicat $P(x)$ est vrai pour (exactement un / un et un seul) élément x de A.

On a par exemple, si $f : E \to F$ est une application

f surjective si $\forall y \in F \ \exists x \in E$ tel que $f(x) = y$ $(*)$

f injective si $\forall x_1 \in E \ \forall x_2 \in E$

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

f bijective si $\forall y \in F \ \exists !\, x \in E$ tel que $f(x) = y$.

Attention à l'ordre des quantificateurs : on ne peut pas échanger un $\exists$ et un $\forall$.

Comparer l'énoncé $(*)$ à l'énoncé

$$\exists x \in E \ \forall y \in F \quad f(x) = y$$

qui ne peut être vrai que lorsque F a un seul élément.

En revanche, on peut échanger un $\forall$ avec un $\forall$

et aussi

un $\exists$ avec un $\exists$

$$\left.\begin{array}{l} \forall x \in E \ \forall y \in F \\ \forall y \in F \ \forall x \in E \\ \forall (x,y) \in E \times F \end{array}\right\} \text{ tout ceci est équivalent.}$$

Négation d'un énoncé avec $\forall$ et $\exists$.

Les prédicats $\text{non}(\forall x \in E : P(x))$

et

$\exists x \in E : \text{non}(P(x))$

sont équivalents.

Pour montrer qu'un énoncé $\forall$ est faux, il suffit de trouver un contre-exemple

Autre règle d'or

Pour montrer qu'un énoncé $\forall^{x \in A}$ est vrai, la preuve commence toujours par "soit x dans A"

De même, les prédicats $\text{non}(\exists x \in E : P(x))$

et

$\forall x \in E : \text{non}\, P(x)$

sont équivalents.

Il est important de savoir écrire la négation de prédicats contenant un ou plusieurs $\exists$ / $\forall$.

Exemples

P : $\forall x \in \mathbb{R}^+ \quad \exists \alpha \in \mathbb{R}^+ \quad \alpha < x$

non P : $\exists x \in \mathbb{R}^+ \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}^+ \quad \alpha \geq x$

l'énoncé non(P) est vrai (le choix $x=0$ convient) donc l'énoncé P est faux

Q : $\exists x \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \exists y \in \mathbb{R} \quad x = ny$

non Q : $\forall x \in \mathbb{R} \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad x \neq ny$

Techniques de preuve

Comment faire pour ~~prouver~~ qu'un résultat est vrai ?
(une assertion)

Voici plusieurs méthodes de preuve

- **La disjonction de cas**

  On vérifie que ~~les cas~~ l'assertion est vraie dans tous les cas possibles (sans en oublier)

Exemple : Montrer que $\forall x \in \mathbb{R} \quad \exists y \in \mathbb{R} \ : \ x < y^2$

Preuve

Soit $x \in \mathbb{R}$ [règle d'or du $\forall$]

- Si $x < 0$, $y = 0$ convient car $x < 0 = y^2$
- Si $0 \leq x < 1$, alors $y = 1$ convient car $x < 1 = y^2$
- Si $x = 1$, $y = 2$ convient car $x = 1 < 4 = y^2$
- Si $x > 1$, alors $y = x$ convient car $x < x^2 = y^2$ (obtenue en multipliant par le réel strictement positif x l'inégalité $x > 1$).

On a bien traité tous les cas : tout réel x vérifie $x < 0$ ou $0 \leq x < 1$ ou $x = 1$ ou $x > 1$.

- **Preuves ensemblistes** - Soient A et B des ensembles

  Lorsqu'on veut montrer une inclusion $A \subset B$, on raisonne toujours comme suit :

  « Soit $x \in A$

  ⋮ ← à compléter selon l'exercice !

  Alors $x \in B$

  On a donc montré que $A \subset B$ »

En particulier, on peut retenir la

- **Preuve par double inclusion**

Soient A, B deux ensembles. Pour montrer l'égalité $A = B$, il suffit de montrer que $A \subset B$ puis que $B \subset A$

Exemple Pour des ensembles A, B, C, montrer que $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$\boxed{\subset}$ Soit $x \in A \cap (B \cup C)$.

Alors $x \in B \cup C$, donc $x \in B$ ou $x \in C$

- Si $x \in B$, comme $x \in A$ on a $x \in A \cap B$ donc $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- Si $x \in C$, comme $x \in A$ on a $x \in A \cap C$ donc $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Dans tous les cas, on a $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

On a donc montré que $A \cap (B \cup C) \subset (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$\boxed{\supset}$ Soit $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$. Alors $x \in A \cap B$ ou $x \in A \cap C$

- Si $x \in A \cap B$, $x \in A$ et $x \in B \subset B \cup C$ donc $x \in A \cap (B \cup C)$
- Si $x \in A \cap C$, $x \in A$ et $x \in C \subset B \cup C$ donc $x \in A \cap (B \cup C)$

Dans tous les cas, on a $x \in A \cap (B \cup C)$.

On a donc montré que $(A \cap B) \cup (A \cap C) \subset A \cap (B \cup C)$

Par double inclusion, on a donc $(A \cap B) \cup (A \cap C) = A \cap (B \cup C)$

Dans le même genre, on a la

- **Preuve par double inégalité**. Soient a, b des réels.

Pour montrer l'égalité $a = b$, il suffit de montrer séparément que $a \leq b$ et $a \geq b$.

Preuve par double implication

Soient P et Q des assertions. Pour montrer l'équivalence $P \Leftrightarrow Q$, il suffit de montrer séparément les implications $P \Rightarrow Q$ et $Q \Rightarrow P$.

Comment montrer une implication ?

Beaucoup d'énoncés qu'on vous demande de montrer sont des implications. Quand on vous dit : soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $\underbrace{\ldots\ldots}_{P}$. Montrer que $\underbrace{\ldots\ldots}_{Q}$, on vous demande de montrer que l'implication $P \Rightarrow Q$ est vraie (on dit que P est l'hypothèse et que Q est la conclusion).

Preuve par contraposée

Les implications $P \Rightarrow Q$ et $\text{non}(Q) \Rightarrow \text{non}(P)$ ont même valeur de vérité. Parfois, la seconde est plus facile à montrer.

Exemple Soit $x \in \mathbb{R}^+$ tel que $\forall \varepsilon > 0,\ x < \varepsilon$. Montrer que $x = 0$

[ε (epsilon) est une lettre grecque qu'on aime bien utiliser pour un nombre réel qui peut être tout petit].

$P(x)$: "$\forall \varepsilon > 0,\ x < \varepsilon$"

$Q(x)$: "$x = 0$"

($\forall \varepsilon > 0$ est la même chose que $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$)

On demande de montrer que l'implication $P(x) \Rightarrow Q(x)$ est vraie.

La contraposée est $\text{non}\, Q(x) \Rightarrow \text{non}\, P(x)$ où

$\text{non}\, Q(x)$: "$x \neq 0$"

$\text{non}\, P(x)$: "$\exists \varepsilon > 0,\ x \geq \varepsilon$"

Soit $x \geq 0$. Si $x \neq 0$, on peut poser $\varepsilon = x$. On a démontré $\text{non}\, Q(x) \Rightarrow \text{non}\, P(x)$ et donc l'implication $P(x) \Rightarrow Q(x)$ est vraie.

Preuve par l'absurde

On suppose la négation de ce qu'on veut prouver (P) et on arrive à quelque chose de faux.

C'est donc que P est vrai (non(P) $\Rightarrow$ FAUX)

Exemple $\sqrt{2}$ est irrationnel

Exemple historiquement important, pas nécessaire de le comprendre à fond

Preuve Supposons par l'absurde que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$.

On peut donc écrire $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$ $q \in \mathbb{N}^*$

De plus, on peut supposer que p et q ne sont pas tous les deux pairs (si c'est le cas, on simplifie).

On a $\sqrt{2}p = q$ donc $2p^2 = q^2$

Ainsi q^2 est pair, donc q est pair $q = 2n$ pour $n \in \mathbb{N}$

$2p^2 = (2n)^2$ $p^2 = 2n^2$ donc p^2 est pair et p est pair

C'est "absurde" (on contredit ce qu'on a écrit plus haut).

On peut donc en déduire que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Preuve par contre-exemple

Pour démontrer qu'une assertion ~~ou~~ commençant par $\forall$ est fausse, il suffit de donner un "contre-exemple".

On rappelle que

non $(\forall x \in E : P(x))$ a même valeur que $\exists x \in E :$ non $P(x)$

Exemple : considérons l'énoncé

"toute fonction continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dérivable en 0"

Sa négation est

"il existe une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et non dérivable en 0"

Cette négation est vraie : on peut considérer la fonction "valeur absolue", donc l'énoncé initial est faux