Université Claude Bernard - Lyon 1 — **Semestre automne 2021–2022**

L1 — UE : Fondamentaux des mathématiques (INFO)

Contrôle Partiel du 8 Novembre 2021

Durée : 1h30

Les documents et les téléphones/calculatrices/ordinateurs sont interdits.

Vous devrez faire attention à rédiger correctement. Toute rédaction incomplète ou imprécise sera sanctionnée même si le raisonnement est correct. **N'écrivez pas au crayon à papier.**

Exercice 1 – Raisonnement par récurrence (4 points)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par

$$u_0 = 1, \quad u_1 = -5 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n.$$

Démontrer la propriété suivante par récurrence double : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 8 \times 2^n - 7 \times 3^n$.

On raisonne par récurrence double sur $n \in \mathbb{N}$ et on note P_n la propriété $u_n = 8 \times 2^n - 7 \times 3^n$.

Initialisation : Pour $n = 0$, on a $8 \times 2^0 - 7 \times 3^0 = 8 - 7 = 1 = u_0$ et $8 \times 2^1 - 7 \times 3^1 = -5 = u_1$ donc P_0 et P_1 sont vraies.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que P_n et P_{n+1} sont vraies et montrons que P_{n+2} est vraie. En effet, comme par hypothèse $u_n = 8 \times 2^n - 7 \times 3^n$ et $u_{n+1} = 8 \times 2^{n+1} - 7 \times 3^{n+1}$, on a

$$\begin{aligned}
u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n &= 5\left(8 \times 2^{n+1} - 7 \times 3^{n+1}\right) - 6\left(8 \times 2^n - 7 \times 3^n\right) \\
&= 40 \times 2^{n+1} - 48 \times 2^n - 35 \times 3^{n+1} + 42 \times 3^n \\
&= 40 \times 2^{n+1} - 24 \times 2^{n+1} - 35 \times 3^{n+1} + 14 \times 3^{n+1} \\
&= 16 \times 2^{n+1} - 21 \times 3^{n+1} \\
&= 8 \times 2^{n+2} - 7 \times 3^{n+2}.
\end{aligned}$$

Donc P_{n+2} est vraie. On conclut que pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n est vraie.

Exercice 2 – Fonctions trigonométriques circulaires et hyperboliques (6 points)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{ch}(x)\cos(x) + \mathrm{sh}(x)\sin(x)$.

1. Dans cette suite de questions, on restreint l'étude de f sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$.
   (a) La fonction f est-elle paire ? impaire ?
   On a $\forall x \in [-\pi, \pi]$,
   $$\begin{aligned}
   f(-x) = \mathrm{ch}(-x)\cos(-x) + \mathrm{sh}(-x)\sin(-x) &= \mathrm{ch}(x)\cos(x) + (-\mathrm{sh}(x))(-\sin(x)) \\
   &= \mathrm{ch}(x)\cos(x) + \mathrm{sh}(x)\sin(x) \\
   &= f(x),
   \end{aligned}$$
   donc f est paire.
   (b) Déterminer les points où le graphe de f admet une tangente horizontale.
   Calculons la dérivée de f. Pour tout x réel, on a
   $$f'(x) = \mathrm{sh}(x)\cos(x) + \mathrm{ch}(x)(-\sin(x)) + \mathrm{ch}(x)\sin(x) + \mathrm{sh}(x)\cos(x) = 2\,\mathrm{sh}(x)\cos(x).$$

On résout $f'(x) = 0$, c'est-à-dire $2\operatorname{sh}(x)\cos(x) = 0$ sur $[-\pi, \pi]$ pour trouver les abscisses des points du graphe de f admettant une tangente horizontale. On a donc, pour $x \in [-\pi, \pi]$,

$$2\operatorname{sh}(x)\cos(x) = 0 \iff \operatorname{sh}(x) = 0 \text{ ou } \cos(x) = 0 \iff x = 0 \text{ ou } x \in \left\{-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right\}.$$

Ces abscisses correspondent aux points $(0, f(0)) = (0, 1)$, $(\pi/2, f(\pi/2)) = (\pi/2, \operatorname{sh}(\pi/2))$ et $(-\pi/2, \operatorname{sh}(\pi/2))$ (par parité de f).

(c) Déterminer les variations de f sur $[-\pi, \pi]$.

On étudie le signe de f' sur $[-\pi, \pi]$. On sait que

- $\operatorname{sh}(x) \geq 0 \iff x \in [0, \pi]$,
- $\cos(x) \geq 0 \iff x \in [-\pi/2, \pi/2]$.

A l'aide d'un tableau de signe, on en déduit que

- $f'(x) \geq 0 \iff x \in [-\pi, -\pi/2] \cup [0, \pi/2]$,
- $f'(x) \leqslant 0 \iff x \in [-\pi/2, 0] \cup [\pi/2, \pi]$,

ce qui implique que f est croissante sur $[-\pi, -\pi/2]$ ainsi que sur $[0, \pi/2]$, et que f est décroissante sur $[-\pi/2, 0]$ ainsi que sur $[\pi/2, \pi]$.

(d) En déduire que, pour tout $x \in [-\pi, \pi]$, $-\operatorname{ch}(\pi) \leqslant f(x) \leqslant \operatorname{sh}\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

Pour trouver le maximum de f sur $[-\pi, \pi]$, on calcule $f(-\pi/2) = f(\pi/2) = \operatorname{sh}(\pi/2)$.
Pour trouver le minimum de f sur $[-\pi, \pi]$, on calcule $f(-\pi) = f(\pi) = -\operatorname{ch}(\pi) < 0$ et $f(0) = 1$. On en déduit que le minimum de f est $-\operatorname{ch}(\pi)$.
On a donc montré que $\forall x \in [-\pi, \pi]$, $-\operatorname{ch}(\pi) \leqslant f(x) \leqslant \operatorname{sh}\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

2. En exprimant $f(x)^2$ en fonction de $\operatorname{sh}(x), \sin(x), \operatorname{sh}(2x)$ et $\sin(2x)$, montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{sh}^2(x) - \sin^2(x) \geq -1 - \frac{\operatorname{sh}(2x)\sin(2x)}{2}.$$

On calcule, pour tout x réel :

$$\begin{aligned} f(x)^2 &= (\operatorname{ch}(x)\cos(x) + \operatorname{sh}(x)\sin(x))^2 \\ &= \operatorname{ch}^2(x)\cos^2(x) + \operatorname{sh}^2(x)\sin^2(x) + 2\operatorname{ch}(x)\operatorname{sh}(x)\cos(x)\sin(x) \\ &= (1 + \operatorname{sh}^2(x))(1 - \sin^2(x)) + \operatorname{sh}^2(x)\sin^2(x) + \frac{1}{2}(2\sin(x)\cos(x))(2\operatorname{ch}(x)\operatorname{sh}(x)) \\ &= 1 - \sin^2(x) + \operatorname{sh}^2(x) + \frac{1}{2}\sin(2x)\operatorname{sh}(2x). \end{aligned}$$

Comme on sait que $f(x)^2 \geq 0$ pour tout réel x, on obtient bien l'inégalité demandée :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad sh^2(x) - \sin^2(x) \geq -1 - \frac{\operatorname{sh}(2x)\sin(2x)}{2}$$

<u>Exercice 3</u> – Somme (3 points)

1. Déterminer deux réels a et b tels que $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{k}{(k+1)!} = \dfrac{a}{k!} - \dfrac{b}{(k+1)!}$.

Il est clair que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{k}{(k+1)!} = \frac{k+1-1}{(k+1)!} = \frac{k+1}{(k+1)!} - \frac{1}{(k+1)!} = \frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}$$

et donc que $a = b = 1$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, en déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!}$.

   D'après la question précédente, on a

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)!} = \frac{1}{1!} - \frac{1}{(n+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}$$

   car il s'agit d'une somme télescopique.

Exercice 4 – **Applications** (4 points)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x) = x^2 + 2$.

1. Déterminer $f([0,1])$ et $f([-3,4[)$.

   On a $f([0,1]) = [2,3]$ *et* $f([-3,4[) = [2,18[$

2. Déterminer $f^{-1}([0,1])$ et $f^{-1}(]6,+\infty[)$.

   On a $f^{-1}([0,1]) = \emptyset$ *et* $f^{-1}(]6,+\infty[) =]-\infty,-2[\cup]2,+\infty[$.

3. L'application f est-elle injective ?

   f *n'est pas injective car* $f(1) = f(-1) = 3$ *donc* 3 *a deux antécédents par* f.

4. L'application f est-elle surjective ?

   f *n'est pas surjective car* 1 *n'a pas d'antécédent par* f. *En effet,* $f(x) = 1 \iff x^2 = -1$ *n'a pas de solution réelle.*

Exercice 5 – **Prédicats** (3 points)

Montrer que le prédicat "non($P \Rightarrow Q$) ou (P et Q)" a les mêmes valeurs de vérité que celles de P.

On procède par équivalence de prédicats de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \text{" non}(P \Rightarrow Q) \text{ ou } (P \text{ et } Q)\text{"} &\text{ est équivalent à " non}\,(\text{non}(P) \text{ ou } Q) \text{ ou } (P \text{ et } Q)\text{"} \\ &\text{ est équivalent à "}(P \text{ et } \text{non}(Q)) \text{ ou } (P \text{ et } Q)\text{"} \\ &\text{ est équivalent à "}P \text{ et } (Q \text{ ou } \text{non}(Q))\text{"} \\ &\text{ est équivalent à } P, \end{aligned}$$

car (Q ou non(Q)) *est toujours vrai.*

Exercice 6 – **(BONUS) Polynômes et exponentielle** (2 points)

Déterminer si l'énoncé suivant est vrai ou faux, en justifiant votre réponse par une démonstration.

Enoncé : il existe un polynôme P tel que $P(x) = e^x$ pour tout x réel.

L'énoncé est faux. En effet, procédons par l'absurde et supposons qu'un tel polynôme P *existe. Alors on aura*

$$\forall x \in \mathbb{R}, P'(x) = e^x = P(x).$$

Comme $f : x \mapsto e^x$ *est l'unique fonction non-nulle vérifiant* f *vérifiant* $f'(x) = f(x)$ *et* $f(0) = 1$, *on en déduit que* $P = 0$. *On a ainsi une contradiction, ce qui veut dire que l'énoncé est faux.*

Alternativement, en raisonnant encore par l'absurde, on peut aussi remarquer que,

- *Pour tout réel* x, $e^{-x}P(x) = 1$, *et en particulier* $\lim_{x\to+\infty} e^{-x}P(x) = 1$;
- *Par croissances comparées, on a* $\lim_{x\to+\infty} e^{-x}P(x) = 0$.

On a ainsi une contradiction, ce qui veut dire que l'énoncé est faux.