Université Claude Bernard - Lyon 1 **Semestre automne 2021–2022**

L1 UE : Fondamentaux des mathématiques (INFO)

Contrôle Partiel du 8 Novembre 2021

Durée : 1h30

Les documents et les téléphones/calculatrices/ordinateurs sont interdits.

Vous devrez faire attention à rédiger correctement. Toute rédaction incomplète ou imprécise sera sanctionnée même si le raisonnement est correct. **N'écrivez pas au crayon à papier.**

Exercice 1 – Raisonnement par récurrence (4 points)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par

$$u_0 = 1, \quad u_1 = -5 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n.$$

Démontrer la propriété suivante par récurrence double : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 8 \times 2^n - 7 \times 3^n$.

Exercice 2 – Fonctions trigonométriques circulaires et hyperboliques (6 points)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{ch}(x)\cos(x) + \mathrm{sh}(x)\sin(x)$.

1. Dans cette suite de questions, on restreint l'étude de f sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$.
   (a) La fonction f est-elle paire ? impaire ?
   (b) Déterminer les points où le graphe de f admet une tangente horizontale.
   Indice : On montrera que, $\forall x \in [-\pi, \pi]$, $f'(x) = 2\,\mathrm{sh}(x)\cos(x)$.
   (c) Déterminer les variations de f sur $[-\pi, \pi]$.
   (d) En déduire que, pour tout $x \in [-\pi, \pi]$, $-\mathrm{ch}(\pi) \leqslant f(x) \leqslant \mathrm{sh}\left(\frac{\pi}{2}\right)$.
2. En exprimant $f(x)^2$ en fonction de $\mathrm{sh}(x), \sin(x), \mathrm{sh}(2x)$ et $\sin(2x)$, montrer que
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{sh}^2(x) - \sin^2(x) \geq -1 - \frac{\mathrm{sh}(2x)\sin(2x)}{2}.$$

Exercice 3 – Somme (3 points)

1. Déterminer deux réels a et b tels que $\forall k \in \mathbb{N}^*, \dfrac{k}{(k+1)!} = \dfrac{a}{k!} - \dfrac{b}{(k+1)!}$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, en déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!}$.

Exercice 4 – Applications (4 points)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x) = x^2 + 2$.

1. Déterminer $f([0,1])$ et $f([-3,4[)$.
2. Déterminer $f^{-1}([0,1])$ et $f^{-1}(]6,+\infty[)$.
3. L'application f est-elle injective ?
4. L'application f est-elle surjective ?

Exercice 5 – Prédicats (3 points)

Montrer que le prédicat "non($P \Rightarrow Q$) ou (P et Q)" a les mêmes valeurs de vérité que celles de P.

Exercice 6 – (BONUS) Polynômes et exponentielle (2 points)

Déterminer si l'énoncé suivant est vrai ou faux, en justifiant votre réponse par une démonstration.

Enoncé : il existe un polynôme P tel que $P(x) = e^x$ pour tout x réel.