

Correction Feuille 1 : Calculs algébriques

Exercice 1-1

Soit x et y des réels ; en supposant qu'elle est bien définie, fournir une forme plus simple de chacune des expressions suivantes :

$$\begin{array}{llll}
 1) (125)^{-2/3} & 2) (-5x)^3 & 3) \left(\frac{x^{-2}}{y^{-2}}\right) \left(\frac{x}{y}\right)^2 & 4) \sqrt[3]{\sqrt[4]{27}} \\
 5) -2\sqrt{9y} + 10\sqrt{y} & 6) \left[(x^2y^{-2})^{-1}\right]^{-1} & 7) 5^{-1/2} \cdot 5x^{11/6} \cdot (5x)^{-3/2} & 8) \frac{\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x}}{\frac{y}{x}} \\
 9) \frac{y}{5x-y} + \frac{5x}{y-5x} + 1 & 10) \frac{\frac{2}{x^2-1} + \frac{3}{x-1}}{3x+5} & 11) \frac{x+x^2+x^3+x^4}{x^{-1}+x^{-2}+x^{-3}+x^{-4}} & 12) \frac{1+x^5}{x^{-2}-x^{-3}+x^{-4}-x^{-5}+x^{-6}}
 \end{array}$$

Correction exercice 1-1

1. $\sqrt[3]{125} = 5$, d'où $(125)^{-2/3} = 1/25$.
2. $(-5x)^3 = (-1)^3 5^3 x^3 = -125x$.
3. Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on a

$$\frac{x^\alpha}{y^\alpha} = \left(\frac{x}{y}\right)^\alpha ;$$

on en déduit que

$$\frac{x^{-2}}{y^{-2}} \left(\frac{x}{y}\right)^2 = 1.$$

4. On a $\sqrt[3]{\sqrt[4]{27}} = \left(27^{1/4}\right)^{1/3} = 27^{(1/4) \cdot (1/3)} = \left(27^{1/3}\right)^{1/4} = 3^{1/4} = \sqrt[4]{3}$.
5. $\sqrt{9y} = \sqrt{9}\sqrt{y}$; donc, on peut factoriser par $2\sqrt{y}$ et on trouve

$$-2\sqrt{9y} + 10\sqrt{y} = 2\sqrt{y} (5 - \sqrt{9}) = 4\sqrt{y}.$$

6. $\left[(x^2y^{-2})^{-1}\right]^{-1} = (x^2y^{-2})^{(-1) \cdot (-1)} = x^2/y^2$.
7. On a

$$5^{-1/2} \cdot 5x^{11/6} \cdot (5x)^{-3/2} = 5^{-1/2+1-3/2} x^{11/6-3/2} = 5^{-1} x^{1/3} = \frac{\sqrt[3]{x}}{5}.$$

8. On a

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x} &= \frac{x - (x+1)}{(x+1)x} = \frac{-1}{(x+1)x} \\
 \frac{1}{y/x} &= \frac{x}{y},
 \end{aligned}$$

d'où on trouve $\frac{\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x}}{\frac{y}{x}} = \frac{-1}{(x+1)y}$.

9. On a

$$\frac{y}{5x-y} + \frac{5x}{y-5x} + 1 = \frac{y}{5x-y} - \frac{5x}{5x-y} + 1 = \frac{y-5x}{5x-y} + 1 = 0.$$

10. En utilisant le fait que $x^2-1 = (x-1)(x+1)$, le même calcul de l'expression 8 montre que le numérateur est égal à $\frac{3x+5}{x^2-1}$, et donc

$$\frac{\frac{2}{x^2-1} + \frac{3}{x-1}}{3x+5} = \frac{1}{x^2-1}.$$

11. On écrit le dénominateur de la façon suivante :

$$x^{-1} + x^{-2} + x^{-3} + x^{-4} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^4} = \frac{x^3 + x^2 + x + 1}{x^4}.$$

En factorisant le numérateur par x , on trouve alors

$$\frac{x + x^2 + x^3 + x^4}{x^{-1} + x^{-2} + x^{-3} + x^{-4}} = \frac{x(x^3 + x^2 + x + 1)}{\frac{x^3 + x^2 + x + 1}{x^4}} = x^5.$$

12. On observe que

$$x^5 + 1 = x^5 - (-1) = (x + 1)(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1).$$

D'autre côté, en raisonnant comme au point 11, le dénominateur s'écrit comme

$$x^{-2} - x^{-3} + x^{-4} - x^{-5} + x^{-6} = \frac{x^4 - x^3 + x^2 - x + 1}{x^6},$$

d'où on peut déduire que

$$\frac{1 + x^5}{x^{-2} - x^{-3} + x^{-4} - x^{-5} + x^{-6}} = x^6(x + 1).$$

Exercice 1-2 Soit a, b, c et d des réels. Développer $(a + b + c + d)^2$ puis $(a + b + c)^3$.

Correction exercice 1-2

C'est un calcul.

$$(a + b + c + d)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2ab + 2ac + 2ad + 2bc + 2bd + 2cd$$

$$\begin{aligned} (a + b + c)^3 &= (a + b + c)^2(a + b + c) = (a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc)(a + b + c) \\ &= a^3 + b^3 + c^3 + 3a^2b + 3a^2c + 3ab^2 + 3ac^2 + 3b^2c + 3bc^2 + 6abc. \end{aligned}$$

Exercice 1-3 Soit x et y deux réels. On suppose que $x - y = 1$. Calculer $x^3 - 3xy - y^3$.

Correction exercice 1-3 On observe que $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$. En utilisant l'hypothèse $x - y = 1$, on trouve donc

$$x^3 - 3xy - y^3 = x^2 + xy + y^2 - 3xy = (x - y)^2 = 1.$$

Exercice 1-4

1. Rappeler la preuve, faite en cours, de la propriété suivante : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

2. Expliciter deux réels a et b tels que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a $\frac{2}{k(k+2)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+2}$.

3. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+2)} = \frac{3}{2} - \frac{2n+3}{(n+1)(n+2)}$.

4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\prod_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2} \right) = \frac{2^{n+1}}{(n+2)(n+1)(n!)^2}$.

Correction exercice 1-4

1. Fait en cours.

2. En calculant le dénominateur en commun, on a

$$\frac{a}{k} + \frac{b}{k+2} = \frac{a(k+2) + bk}{k(k+2)} = \frac{(a+b)k + 2a}{k(k+2)},$$

qui implique que $a = 1$ et $b = -a = -1$.

3. En utilisant le résultat précédent, on peut écrire

$$\begin{aligned} 2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+2)} &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2} \right) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+2} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=3}^{n+2} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \sum_{k=3}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=3}^n \frac{1}{k} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \\ &= \frac{3}{2} - \frac{2n+3}{(n+1)(n+2)}. \end{aligned}$$

4. On utilise encore le résultat du point 2 pour écrire

$$\prod_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2} \right) = \prod_{k=1}^n \frac{2}{k(k+2)} = 2^n \prod_{k=1}^n \frac{1}{k} \cdot \prod_{k=1}^n \frac{1}{(k+2)}.$$

Bien sûr, on a $\prod_{k=1}^n \frac{1}{k} = 1/n!$. D'autre côté, on a aussi

$$\prod_{k=1}^n \frac{1}{(k+2)} = \prod_{k=3}^{n+2} \frac{1}{k} = 2 \left(\prod_{k=3}^n \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \right) \frac{1}{n+1} \frac{1}{n+2} = 2 \left(\prod_{k=1}^n \frac{1}{k} \right) \frac{1}{n+1} \frac{1}{n+2}.$$

En mettant tout ensemble, on trouve

$$\prod_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2} \right) = 2^{n+1} \frac{1}{(n!)^2} \frac{1}{n+1} \frac{1}{n+2}.$$

Exercice 1-5

- Donner deux différentes preuves de la formule du cours suivante : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$.
 - En effectuant une démonstration par récurrence.
 - En montrant préalablement, par changement de variable, l'identité :

$$\sum_{k=0}^n (n-k) = \sum_{k=0}^n k.$$

- En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^n (2k+1) = (n+1)^2$.

Correction exercice 1-5

- Pour (a), on commence par vérifier l'initialisation : pour $n = 1$, on a $\sum_{k=0}^1 k = 0 + 1 = 1$, tandis que $1 \cdot (1+1)/2 = 2/2 = 1$. La formule est donc initialisée. On vérifie maintenant l'hérédité. Supposons que la propriété est vraie pour n , donc

$$\sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Il faut prouver la propriété pour $n+1$, c'est-à-dire il faut montrer que

$$\sum_{k=0}^{n+1} k = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

On commence par écrire $\sum_{k=0}^{n+1} k = \sum_{k=0}^n k + (n+1)$. En utilisant l'hypothèse de récurrence, on a

$$\sum_{k=0}^{n+1} k = \sum_{k=0}^n k + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{1}{2}(n+1)(n+2).$$

L'hérédité est donc vérifiée, et, par conséquent, la formule est prouvée pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Pour la partie (b), on admet l'identité (qui est un simple changement de variable). On appelle

$$S := \sum_{k=0}^n k$$

la quantité à déterminer. L'identité nous dit que $\sum_{k=0}^n (n-k) = S$. Mais, en développant le membre de gauche, on a

$$\sum_{k=0}^n (n-k) = \sum_{k=0}^n n - \sum_{k=0}^n k = n \sum_{k=0}^n 1 - S = n(n+1) - S.$$

On en déduit que $n(n+1) - S = S$, d'où $S = n(n+1)/2$.

2. C'est un calcul : grâce à la formule précédente, on peut calculer

$$\sum_{k=0}^n (2k+1) = 2 \sum_{k=0}^n k + \sum_{k=0}^n 1 = 2 \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = (n+1)(n+1) = (n+1)^2.$$

Exercice 1-6

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{i=0}^n \left(\sum_{j=0}^n (i+j) \right) = n(n+1)^2$.

2. En utilisant sans les démontrer (ce serait facile par récurrence) les deux identités

$$\sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \text{ et } \sum_{k=0}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2, \text{ montrer que pour tout } n \in \mathbb{N}^* :$$

$$\sum_{i=0}^n \left(\sum_{j=0}^i ij \right) = \frac{n(n+1)(3n^2+7n+2)}{24}.$$

Correction exercice 1-6

1. En utilisant la formule de l'exercice précédent, on a

$$\sum_{j=0}^n (i+j) = \sum_{j=0}^n i + \sum_{j=0}^n j = (n+1)i + \frac{n(n+1)}{2},$$

qui donne

$$\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n (i+j) = (n+1) \sum_{i=0}^n i + \frac{n(n+1)}{2} \sum_{i=0}^n 1 = \frac{n(n+1)^2}{2} + \frac{n(n+1)^2}{2} = n(n+1)^2.$$

La formule est donc prouvée.

2. De façon analogue, on a

$$\sum_{j=0}^i ij = i \sum_{j=0}^i j = \frac{i^2(i+1)}{2} = \frac{1}{2} (i^3 + i^2).$$

En utilisant cette propriété, on calcule

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^i ij &= \frac{1}{2} \left(\sum_{i=0}^i i^3 + \sum_{j=0}^i i^2 \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{n^2(n+1)^2}{4} + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right) \\ &= \frac{n(n+1)}{24} (3n(n+1) + 2(2n+1)), \end{aligned}$$

d'où on trouve facilement l'expression finale.

Exercice 1-7

1. Pour $0 \leq i \leq n$ et $0 \leq j \leq n$, quelles valeurs prend l'entier $\text{Max}(i, j)$? Combien de fois prend-il une valeur k fixée?
2. En déduire que

$$\sum_{i=0}^n \left(\sum_{j=0}^n \text{Max}(i, j) \right) = \sum_{k=0}^n (2k+1)k.$$

3. En utilisant la formule de sommation des carrés des entiers consécutifs rappelée à l'exercice précédent, en déduire que :

$$\sum_{i=0}^n \left(\sum_{j=0}^n \text{Max}(i, j) \right) = \frac{n(n+1)(4n+5)}{6}.$$

Correction exercice 1-7

1. Étant donné que $0 \leq i \leq n$ et $0 \leq j \leq n$, l'entier $\text{Max}(i, j)$ peut prendre toutes les valeurs entre 0 et n . Maintenant, si on fixe k dans le même intervalle, on aura $\text{Max}(i, j) = k$ pour :
 - toutes les couples (i, k) , avec $0 \leq i < k$: on a donc k couples ;
 - toutes les couples (k, j) , avec $0 \leq j < k$: encore k couples ;
 - la couple (k, k) .

En total, ça fait $2k+1$ fois.

2. Deux solutions possibles.

(a) On découpe la somme à l'intérieur comme

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^n \text{Max}(i, j) &= \sum_{j=0}^i i + \sum_{j=i+1}^n j = i(i+1) + \sum_{j=0}^n j - \sum_{j=0}^i j \\ &= i(i+1) + \frac{n(n+1)}{2} - \frac{i(i+1)}{2} \\ &= \frac{n(n+1)}{2} + \frac{i(i+1)}{2}. \end{aligned}$$

Si maintenant on calcule la somme à l'extérieur, en utilisant les formules des exercices 1-5 et 1-6, on trouve facilement

$$\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n \text{Max}(i, j) = \frac{1}{6} n(n+1)(4n+5).$$

C'est exactement le même résultat qu'on trouve quand on calcule la somme à droite, après avoir fait les multiplications à l'intérieur.

- (b) Vu que la fonction peut prendre toutes les valeurs k entre 0 et n , et que la valeur k est prise $2k+1$ fois, on peut écrire notre somme comme la somme des valeurs que la fonction prend, multipliées par le nombre des fois qu'elles sont prises : notamment,

$$\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n \text{Max}(i, j) = \sum_{k=0}^n k(2k+1).$$

3. La réponse donnée au point précédent répond aussi à cette question.

Exercice 1-8

1. Déterminer l'ensemble des réels x qui vérifient $-3x + 4 \geq x - 3$.
2. Déterminer l'ensemble des réels x qui vérifient $x^2 - 4x - 2 \geq 0$.
3. Déterminer l'ensemble des réels x qui vérifient $(x + 2)^2 < -x$.
4. Déterminer l'ensemble des réels x qui vérifient $x^3 - 6x \geq x^2$.

Correction exercice 1-8

1. Un calcul simple permet de trouver $4x \leq 7$, d'où $x \leq 7/4$.
2. Ça suffit de chercher les racines du polynôme $x^2 - 4x - 2$, qui sont $2 \pm \sqrt{6}$. L'inégalité est alors vérifiée pour tous les nombres réels x tels que $x \leq 2 - \sqrt{6}$ ou $x \geq 2 + \sqrt{6}$.
3. On développe le carré et on amène x à gauche : on trouve $x^2 + 5x + 4 < 0$. On remarque que $x^2 + 5x + 4 = (x + 4)(x + 1)$, et alors $-4 < x < -1$.
4. L'inégalité à résoudre est équivalente à $x^3 - x^2 + 6x \geq 0$. On peut factoriser le membre de gauche de la façon suivante : $x^3 - x^2 + 6x = x(x^2 - x + 6) = x(x - 3)(x + 2)$. Un tableau de signes permet de trouver la solution $\{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 0 \text{ ou } x \geq 3\}$.

Exercice 1-9

1. Pour $a \in \mathbb{R}$, on considère les réels $A = \frac{a^4 - 7a^2 + 4}{3}$ et $B = \frac{a^4 - 9a^2 + 5}{4}$. Montrer que l'un de ces deux nombres (on précisera lequel) est toujours plus grand que l'autre.
2. Soit m et n deux réels. Pour $a \in \mathbb{R}$, on considère les réels $C = \frac{a^4 + ma^2 + 2}{3}$ et $D = \frac{a^4 + na^2 + 3}{4}$. Montrer que le signe de $D - C$ n'est pas constant quand a varie dans \mathbb{R} .

Correction exercice 1-9

1. On impose la relation $A \leq B$. Après des calculs simples, on se reconduit à l'inégalité $a^4 - a^2 + 1 \leq 0$. Maintenant, en posant $a^2 = y$, c'est facile à voir que cette inégalité n'est jamais satisfaite (pour tout $y \in \mathbb{R}$, on a $y^2 - y + 1 > 0$). Donc, on en déduit que, pour tout $a \in \mathbb{R}$, on a $A > B$.
2. On calcule

$$D - C = \frac{1}{12} (-a^4 + (3n - 4m)a^2 + 1).$$

Maintenant, pour $a = 0$, $D - C = 1/12 > 0$. Pour $a \rightarrow +\infty$, par contre, $D - C \rightarrow -\infty$, donc le signe de $D - C$ n'est pas constant.

Exercice 1-10

1. Déterminer l'ensemble des $x \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{5}{6}\}$ qui vérifient $\frac{-2}{6x + 5} > 1$.
2. Déterminer l'ensemble des $x \in \mathbb{R} \setminus \{2, -\frac{2}{3}\}$ qui vérifient $\frac{1}{x - 2} < \frac{2}{3x + 2}$.

Correction exercice 1-10

1. On amène le terme de gauche à droite : l'inégalité est donc équivalente à résoudre

$$1 + \frac{2}{6x + 5} < 0.$$

On calcule le dénominateur en commun, et on trouve

$$\frac{6x + 7}{6x + 5} < 0.$$

En dressant un tableau de signes, on conclut que l'inégalité est vérifiée pour $x \in] -7/6, -5/6[$.

2. L'argument est tout à fait analogue au précédent : on amène le terme de gauche à droite et on calcule le dénominateur en commun. Après avoir multiplié par -1 pour se retrouver avec un coefficient de x positif au numérateur, on se retrouve à résoudre l'inégalité équivalente

$$\frac{x+6}{(3x+2)(x-2)} < 0.$$

On résout cette inégalité en dressant un tableau de signe, et on trouve l'ensemble des solutions $S =]-\infty, -6[\cup]-2/3, 2[$.

Exercice 1-11 Montrer que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $|xy| \leq \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$.

Correction exercice 1-11

Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on calcule

$$0 \leq (x+y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy.$$

De la même manière, on a aussi

$$0 \leq (x-y)^2 = x^2 + y^2 - 2xy.$$

Donc, en mettant ensemble ces deux inégalités, on trouve

$$-(x^2 + y^2) \leq 2xy \leq x^2 + y^2$$

ce qui est équivalent à dire que $2|xy| \leq x^2 + y^2$.

Exercice 1-12 Montrer que pour tout $x \in [-1, 1]$, $|1 - x^4| \leq 4|1 - x|$.

Correction exercice 1-12 On commence par remarquer que

$$1 - x^4 = (1 - x^2)(1 + x^2) = (1 - x)(1 + x)(1 + x^2).$$

En utilisant le fait que $|ab| = |a||b|$, on peut amener le terme de droite à gauche du signe d'inégalité et on peut mettre en facteur $|1 - x|$: cela donne

$$|1 - x| (|1 + x||1 + x^2| - 4) \leq 0.$$

Maintenant, $|1 - x| \geq 0$ pour tout x , donc cela suffit de résoudre

$$|1 + x||1 + x^2| - 4 \leq 0.$$

On note que, pour $x \in [-1, 1]$, les deux arguments de la valeur absolue sont positifs : en développant les produits, on trouve donc

$$x^3 + x^2 + x + 1 - 3 \leq 0.$$

Étant donné que $x \in [-1, 1]$, par inégalité triangulaire on a que

$$x^3 + x^2 + x \leq |x^3 + x^2 + x| \leq |x|^3 + |x|^2 + |x| \leq 3,$$

qui dit que l'inégalité de départ est toujours vérifiée pour $x \in [-1, 1]$.

Exercice 1-13 Pour x réel, on note $f(x) = |2 - |1 - x||$. Exprimer $f(x)$ sans utiliser de valeur absolue en discutant selon la position de x sur l'axe réel, et tracer le graphe de f .

Correction exercice 1-13

Premier cas : $1 - x \geq 0$, c'est-à-dire $x \leq 1$. Dans ce cas, $f(x) = |2 - (1 - x)| = |1 + x|$. Si en plus $1 + x \geq 0$, c'est-à-dire $x \geq -1$, alors $f(x) = 1 + x$.

Si, au contraire, $x < -1$, on trouve $f(x) = -x - 1$.

Deuxième cas : si $1 - x < 0$, c'est-à-dire $x > 1$, alors $f(x) = |2 + (1 - x)| = |3 - x|$. Si maintenant $x \leq 3$, alors $f(x) = 3 - x$; si $x > 3$, on a $f(x) = x - 3$.

Conclusion : Pour $x < -1$, on a $f(x) = -x - 1$. Pour $-1 \leq x \leq 1$, on a $f(x) = 1 + x$. Pour $1 < x \leq 3$, on a $f(x) = 3 - x$. Enfin, si $x > 3$, on a $f(x) = x - 3$.

Exercice 1-14 Déterminer l'ensemble des réels x qui vérifient $|2 - x| \leq 3 - x$.

Correction exercice 1-14

On sépare l'étude dans les deux cas suivants.

(i) Si $2 - x \geq 0$, alors l'inégalité devient

$$2 - x \leq 3 - x \quad \Longrightarrow \quad 2 \leq 3,$$

ce qui est vrai pour tout $x \in \mathbb{R}$. Mais x doit vérifier $x \leq 2$, donc l'ensemble des solutions de la première inégalité est $] - \infty, 2]$.

(ii) si $2 - x < 0$, alors on trouve

$$-2 + x \leq 3 - x \quad \Longrightarrow \quad 2x \leq 1,$$

ce qui est vrai pour $x \leq 1/2$. Mais x devait être plus grande que 2, donc la deuxième inégalité n'a pas de solutions.

En conclusion, l'inégalité est satisfaite pour tout $x \in] - \infty, 2]$.

Exercice 1-15 Expliciter trois réels a , b et c tels que pour tout réel x on ait :

$$x^3 - x^2 + 2x + 4 = (x + 1)(ax^2 + bx + c)$$

puis en déduire l'ensemble des x réels pour lesquels $x^3 - x^2 + 2x + 4 > |x + 1|$.

Correction exercice 1-15

En développant les produits à droite, on trouve l'égalité

$$x^3 - x^2 + 2x + 4 = ax^3 + (a + b)x^2 + (b + c)x + c.$$

On en déduit que

$$a = 1, \quad a + b = -1, \quad b + c = 2, \quad c = 4,$$

c'est-à-dire $a = 1$, $c = 4$ et $b = -2$.

Pour telles valeurs de (a, b, c) , on a une factorisation de $x^3 - x^2 + 2x + 4$:

$$x^3 - x^2 + 2x + 4 = (x + 1)(x^2 - 2x + 4).$$

On remarque que $x^2 - 2x + 4 \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ (soit on calcule les racines réelles par la formule, soit on reconnaît que ce terme est de la forme $a^2 + ab + b^2$). L'inégalité à résoudre devient alors

$$(x + 1)(x^2 - 2x + 4) > |x + 1|.$$

Vu que le terme de droite est positif et que $x^2 - 2x + 4 \geq 0$, on doit avoir forcément $x + 1 > 0$, c'est-à-dire $x > -1$. En utilisant cette remarque, on va résoudre alors

$$(x + 1)(x^2 - 2x + 4) > x + 1 \quad \Longrightarrow \quad (x + 1)(x^2 - 2x + 3) > 0.$$

Encore une fois, $x + 1 > 0$; en plus, et donc il faut résoudre $x^2 - 2x + 3 > 0$. Le polynôme $x^2 - 2x + 3$ a seulement des racines complexes, autrement dit la dernière inégalité est toujours vraie. L'ensemble des solutions est donc $] - 1, +\infty[$.

Exercice 1-16

1. En utilisant la formule du binôme, calculer les sommes $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$ et $\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k}$.

2. a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $p \in \{1, \dots, n\}$, $p \binom{n}{p} = n \binom{n-1}{p-1}$.

b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{p=0}^n p \binom{n}{p} = n2^{n-1}$.

3. À l'aide de la formule du triangle de Pascal, montrer que pour tout $(p, n) \in \mathbb{N}^2$:

$$\sum_{k=0}^n \binom{p+k}{k} = \binom{p+n+1}{n}.$$

Correction exercice 1-16

1. On a

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k} = (1+1)^n = 2^n$$
$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k 1^{n-k} = (1-1)^n = 0.$$

2. Pour n et p comme dans le texte, on calcule

$$p \binom{n}{p} = p \frac{n!}{(n-p)! p!} = \frac{n(n-1)!}{(n-p-1+1)! (p-1)!} = n \frac{(n-1)!}{((n-1)-(p-1))! (p-1)!} = n \binom{n-1}{p-1}.$$

On en déduit la formule donnée. En fait, pour $n = 0$, il n'y a rien à prouver (on trouve $0 = 0$, qui est toujours vrai). Supposons alors $n \geq 1$. On remarque que le premier terme dans la somme à gauche (correspondant à $p = 0$) est nul ; donc on peut écrire

$$\sum_{p=0}^n p \binom{n}{p} = \sum_{p=1}^n p \binom{n}{p} = \sum_{p=1}^n n \binom{n-1}{p-1} = n \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} = n 2^{n-1},$$

qui est exactement ce qu'on voulait prouver.

3. Observons que, si $n = 0$, les deux membres de l'égalité à prouver valent 1, et donc l'égalité est vraie. Supposons maintenant $n \geq 1$, $p \in \mathbb{N}$. On commence par remarquer que

$$(*) \quad \sum_{k=0}^n \binom{p+k}{k} = 1 + \sum_{k=1}^n \binom{p+k}{k}.$$

Maintenant, la formule du triangle de Pascal nous dit que, pour tout $k \geq 1$ et tout $p \in \mathbb{N}$,

$$\binom{p+k}{k} + \binom{p+k}{k-1} = \binom{p+k+1}{k}.$$

En prenant la somme sur $k = 1 \dots n$ à gauche et à droite, on déduit que

$$\sum_{k=1}^n \binom{p+k}{k} + \sum_{k=1}^n \binom{p+k}{k-1} = \sum_{k=1}^n \binom{p+k+1}{k}.$$

En faisant le changement de variable $j = k + 1$ dans la somme à droite, on trouve

$$\sum_{k=1}^n \binom{p+k}{k} + \sum_{k=1}^n \binom{p+k}{k-1} = \sum_{j=2}^{n+1} \binom{p+j}{j-1} = \sum_{j=1}^n \binom{p+j}{j-1} - 1 + \binom{p+n+1}{n}.$$

On peut simplifier le terme qui apparaît à droite et à gauche, et on obtient

$$\sum_{k=1}^n \binom{p+k}{k} = -1 + \binom{p+n+1}{n}.$$

En utilisant cette égalité dans (*), on déduit tout de suite la formule souhaitée.

Exercice 1-17 Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$, $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.
2. Montrer que pour tout $k \in \{0, \dots, n-1\}$, $\binom{2n}{k} < \binom{2n}{k+1}$. En déduire que pour tout $k \in \{0, \dots, 2n\}$, $\binom{2n}{k} \leq \binom{2n}{n}$.

3. Montrer que $\frac{2^{2n}}{2n+1} \leq \binom{2n}{n}$. (Indication : on pourra considérer l'entier $\sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k}$).

Correction exercice 1-17

1. C'est un calcul simple : par définition, on a

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(n-(n-k))!(n-k)!} = \binom{n}{n-k}.$$

2. L'inégalité à prouver est équivalent à l'inégalité suivante : pour tout $0 \leq k \leq n-1$,

$$\frac{1}{k!(2n-k)!} < \frac{1}{(k+1)!(2n-k-1)!} \Leftrightarrow \frac{(k+1)!}{k!} < \frac{(2n-k)!}{(2n-k-1)!},$$

c'est-à-dire $k+1 < 2n-k$, ce qui est toujours vrai (car $k \leq n-1$). Soit maintenant $k = n+1, \dots, 2n$: grâce à la question du point 1, on peut écrire

$$\binom{2n}{k} = \binom{2n}{2n-k}.$$

Vu que $n+1 \leq k \leq 2n$, on a que $0 \leq 2n-k \leq n-1$, qui implique (grâce à l'inégalité prouvée ci-dessus)

$$\binom{2n}{k} = \binom{2n}{2n-k} < \binom{2n}{2n-k+1} = \binom{2n}{k-1}.$$

En conclusion, la valeur maximale est atteinte pour $k = n$, et on a donc

$$\binom{2n}{k} \leq \binom{2n}{n}$$

pour tout k entre 0 et $2n$.

Exercice 1-101

1. Expliciter deux constantes réelles a et b telles que pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$, on ait :

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1} + \frac{a}{k+2}.$$

2. Soit $n \geq 2$ un entier. Utiliser la question précédente pour obtenir une expression pas trop compliquée de la somme $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$.

Exercice 1-102 Soit $n \in \mathbb{N}$. L'objectif de cet exercice est de refaire l'exercice 7 **sans** considérer comme connue la formule de sommation des carrés d'entiers consécutifs. On notera $S = \sum_{k=0}^n k^2$, et on fera semblant de ne pas savoir calculer cet entier S .

1. En refaisant à l'identique l'exercice 7, montrer que :

$$\sum_{i=0}^n \left(\sum_{j=0}^n \text{Max}(i, j) \right) = 2S + \frac{n(n+1)}{2}.$$

2. Soit $i \in \{0, \dots, n\}$.

a) Montrer que $\sum_{j=0}^n \text{Max}(i, j) = \sum_{j=0}^i i + \sum_{j=i+1}^n j$.

b) Montrer d'une part que $\sum_{j=0}^i i = i(i+1)$ et d'autre part que $\sum_{j=i+1}^n j = \frac{n(n+1)}{2} - \frac{i(i+1)}{2}$.

3. En utilisant la question précédente, obtenir la relation :

$$4 \sum_{i=0}^n \left(\sum_{j=0}^n \text{Max}(i, j) \right) = 2 \sum_{i=0}^n (n(n+1) + i^2 + i).$$

4. En rapprochant les formules prouvées aux questions 1 et 3, conclure.

Exercice 1-103 Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

Exercice 1-104

1. Déterminer l'ensemble des réels x qui vérifient $x^4 - 13x^2 + 36 \leq 0$.
2. Déterminer l'ensemble des $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 3\}$ qui vérifient $\frac{x-6}{3-x} < \frac{x+6}{x+1}$.
3. Déterminer l'ensemble des réels x qui vérifient $|x-3| + |x-7| = 4$.
4. Déterminer l'ensemble des réels x qui vérifient $|x-1| + |x-2| < 1$.

Exercice 1-105 Soit x et y deux réels tels que $0 < x \leq y$. On pose :

$$m = \frac{x+y}{2}, \quad g = \sqrt{xy}, \quad h = \frac{2}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}.$$

L'objectif de l'exercice est de montrer la chaîne d'inégalités : $x \leq h \leq g \leq m \leq y$.

1. Montrer que $m \leq y$.
2. Montrer que $g \leq m$.
3. Montrer que $x \leq h$. (Indication : on pourra chercher à comparer $1/x$ et $1/h$).
4. Montrer que $h \leq g$.

Exercice 1-106 Soit a et b deux réels avec $0 < a < b$ et $n \in \mathbb{N}^*$ un entier. L'objectif est d'étudier le sens de variation du k -ème terme du développement de $(a+b)^n$. Plus précisément, pour chaque indice k variant entre 0 et n , on note $u_k = \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$ et on s'intéresse à la liste de réels (u_0, \dots, u_n) .

1. Montrer que pour tout entier $k \in \{0, \dots, n-1\}$, $\frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{n-k}{k+1} \frac{b}{a}$.
2. Montrer que pour tout $k \in \{0, \dots, n-1\}$, $\frac{u_{k+1}}{u_k} = 1 \iff k = \frac{nb-a}{a+b}$ et $\frac{u_{k+1}}{u_k} > 1 \iff k < \frac{nb-a}{a+b}$.
3. Dans cette question, on suppose que $n < \frac{b}{a}$. Montrer que $u_0 < u_1 < u_2 < \dots < u_n$.
4. Dans cette question, on suppose que $n = \frac{b}{a}$. Montrer que $u_0 < u_1 < u_2 < \dots < u_{n-1} = u_n$.
5. (Question plus difficile demandant de l'initiative). Et quand $n > \frac{b}{a}$, comment se comporte la liste (u_0, \dots, u_n) ?

Exercice 1-107

1. On rappelle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$.
 - (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $S_n = \sum_{k=1}^n (k-1)k$.
 - (b) On pose $v_k = k(k-1)(k-2)$.
 - i. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $v_{k+1} - v_k = 3k(k-1)$.
 - ii. Calculer alors $T_n = \sum_{k=1}^n (v_{k+1} - v_k)$.
 - iii. En déduire un lien entre S_n et T_n .
2. Soit $n \in \mathbb{N}$, calculer $C = \sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^n 2^{k-l}$.