

Feuille 1 : Calculs algébriques

Exercice 1-1

Soit x et y des réels ; en supposant qu'elle est bien définie, fournir une forme plus simple de chacune des expressions suivantes :

- 1) $(125)^{-2/3}$
- 2) $(-5x)^3$
- 3) $\left(\frac{x^{-2}}{y^{-2}}\right) \left(\frac{x}{y}\right)^2$
- 4) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{27}}$
- 5) $-2\sqrt{9y} + 10\sqrt{y}$
- 6) $\left[\left(x^2y^{-2}\right)^{-1}\right]^{-1}$
- 7) $5^{-1/2} \cdot 5x^{11/6} \cdot (5x)^{-3/2}$
- 8) $\frac{\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x}}{\frac{y}{x}}$
- 9) $\frac{y}{5x-y} + \frac{5x}{y-5x} + 1$
- 10) $\frac{\frac{2}{x^2-1} + \frac{3}{x-1}}{3x+5}$
- 11) $\frac{x+x^2+x^3+x^4}{x^{-1}+x^{-2}+x^{-3}+x^{-4}}$
- 12) $\frac{1+x^5}{x^{-2}-x^{-3}+x^{-4}-x^{-5}+x^{-6}}$

Exercice 1-2 Soit a, b, c et d des réels. Développer $(a+b+c+d)^2$ puis $(a+b+c)^3$.

Exercice 1-3 Soit x et y deux réels. On suppose que $x-y=1$. Calculer $x^3-3xy-y^3$.

Exercice 1-4

1. Rappeler la preuve, faite en cours, de la propriété suivante : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

2. Expliciter deux réels a et b tels que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a $\frac{2}{k(k+2)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+2}$.
3. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+2)} = \frac{3}{2} - \frac{2n+3}{(n+1)(n+2)}$.
4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\prod_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2}\right) = \frac{2^{n+1}}{(n+2)(n+1)(n!)^2}$.

Exercice 1-5

1. Donner deux différentes preuves de la formule du cours suivante : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$.
 - a) En effectuant une démonstration par récurrence.
 - b) En montrant préalablement, par changement de variable, l'identité :

$$\sum_{k=0}^n (n-k) = \sum_{k=0}^n k.$$

2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^n (2k+1) = (n+1)^2$.

Exercice 1-6

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{i=0}^n \left(\sum_{j=0}^n (i+j) \right) = n(n+1)^2$.
2. En utilisant sans les démontrer (ce serait facile par récurrence) les deux identités $\sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ et $\sum_{k=0}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{i=0}^n \left(\sum_{j=0}^i ij \right) = \frac{n(n+1)(3n^2+7n+2)}{24}.$$

Exercice 1-7

1. Pour $0 \leq i \leq n$ et $0 \leq j \leq n$, quelles valeurs prend l'entier $\text{Max}(i, j)$? Combien de fois prend-il une valeur k fixée?
2. En déduire que

$$\sum_{i=0}^n \left(\sum_{j=0}^n \text{Max}(i, j) \right) = \sum_{k=0}^n (2k+1)k.$$

3. En utilisant la formule de sommation des carrés des entiers consécutifs rappelée à l'exercice précédent, en déduire que :

$$\sum_{i=0}^n \left(\sum_{j=0}^n \text{Max}(i, j) \right) = \frac{n(n+1)(4n+5)}{6}.$$

Exercice 1-8

1. Déterminer l'ensemble des réels x qui vérifient $-3x+4 \geq x-3$.
2. Déterminer l'ensemble des réels x qui vérifient $x^2 - 4x - 2 \geq 0$.
3. Déterminer l'ensemble des réels x qui vérifient $(x+2)^2 < -x$.
4. Déterminer l'ensemble des réels x qui vérifient $x^3 - 6x \geq x^2$.

Exercice 1-9

1. Pour $a \in \mathbb{R}$, on considère les réels $A = \frac{a^4 - 7a^2 + 4}{3}$ et $B = \frac{a^4 - 9a^2 + 5}{4}$. Montrer que l'un de ces deux nombres (on précisera lequel) est toujours plus grand que l'autre.
2. Soit m et n deux réels. Pour $a \in \mathbb{R}$, on considère les réels $C = \frac{a^4 + ma^2 + 2}{3}$ et $D = \frac{a^4 + na^2 + 3}{4}$. Montrer que le signe de $D - C$ n'est pas constant quand a varie dans \mathbb{R} .

Exercice 1-10

1. Déterminer l'ensemble des $x \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{5}{6}\}$ qui vérifient $\frac{-2}{6x+5} > 1$.
2. Déterminer l'ensemble des $x \in \mathbb{R} \setminus \{2, -\frac{2}{3}\}$ qui vérifient $\frac{1}{x-2} < \frac{2}{3x+2}$.

Exercice 1-11 Montrer que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $|xy| \leq \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$.

Exercice 1-12 Montrer que pour tout $x \in [-1, 1]$, $|1 - x^4| \leq 4|1 - x|$.

Exercice 1-13 Pour x réel, on note $f(x) = |2 - |1 - x||$. Exprimer $f(x)$ sans utiliser de valeur absolue en discutant selon la position de x sur l'axe réel, et tracer le graphe de f .

Exercice 1-14 Déterminer l'ensemble des réels x qui vérifient $|2 - x| \leq 3 - x$.

Exercice 1-15 Expliciter trois réels a , b et c tels que pour tout réel x on ait :

$$x^3 - x^2 + 2x + 4 = (x+1)(ax^2 + bx + c)$$

puis en déduire l'ensemble des x réels pour lesquels $x^3 - x^2 + 2x + 4 > |x+1|$.

Exercice 1-16

1. En utilisant la formule du binôme, calculer les sommes $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$ et $\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k}$.
2. a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $p \in \{1, \dots, n\}$, $p \binom{n}{p} = n \binom{n-1}{p-1}$.
b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{p=0}^n p \binom{n}{p} = n 2^{n-1}$.
3. À l'aide de la formule du triangle de Pascal, montrer que pour tout $(p, n) \in \mathbb{N}^2$:

$$\sum_{i=0}^n \binom{p+k}{k} = \binom{p+n+1}{n}.$$

Exercice 1-17 Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$, $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.
2. Montrer que pour tout $k \in \{0, \dots, n-1\}$, $\binom{2n}{k} < \binom{2n}{k+1}$. En déduire que pour tout $k \in \{0, \dots, 2n\}$, $\binom{2n}{k} \leq \binom{2n}{n}$.
3. Montrer que $\frac{2^{2n}}{2n+1} \leq \binom{2n}{n}$. (Indication : on pourra considérer l'entier $\sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k}$).

Exercice 1-101

1. Expliciter deux constantes réelles a et b telles que pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$, on ait :

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1} + \frac{a}{k+2}.$$

2. Soit $n \geq 2$ un entier. Utiliser la question précédente pour obtenir une expression pas trop compliquée de la somme $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$.

Exercice 1-102 Soit $n \in \mathbb{N}$. L'objectif de cet exercice est de refaire l'exercice 7 sans considérer comme connue la formule de sommation des carrés d'entiers consécutifs. On notera $S = \sum_{k=0}^n k^2$, et on fera semblant de ne pas savoir calculer cet entier S .

1. En refaisant à l'identique l'exercice 7, montrer que :

$$\sum_{i=0}^n \left(\sum_{j=0}^n \text{Max}(i, j) \right) = 2S + \frac{n(n+1)}{2}.$$

2. Soit $i \in \{0, \dots, n\}$.

- a) Montrer que $\sum_{j=0}^n \text{Max}(i, j) = \sum_{j=0}^i i + \sum_{j=i+1}^n j$.
- b) Montrer d'une part que $\sum_{j=0}^i i = i(i+1)$ et d'autre part que $\sum_{j=i+1}^n j = \frac{n(n+1)}{2} - \frac{i(i+1)}{2}$.

3. En utilisant la question précédente, obtenir la relation :

$$4 \sum_{i=0}^n \left(\sum_{j=0}^n \text{Max}(i, j) \right) = 2 \sum_{i=0}^n (n(n+1) + i^2 + i).$$

4. En rapprochant les formules prouvées aux questions 1 et 3, conclure.

Exercice 1-103 Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

Exercice 1-104

1. Déterminer l'ensemble des réels x qui vérifient $x^4 - 13x^2 + 36 \leq 0$.
2. Déterminer l'ensemble des $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 3\}$ qui vérifient $\frac{x-6}{3-x} < \frac{x+6}{x+1}$.
3. Déterminer l'ensemble des réels x qui vérifient $|x-3| + |x-7| = 4$.
4. Déterminer l'ensemble des réels x qui vérifient $|x-1| + |x-2| < 1$.

Exercice 1-105 Soit x et y deux réels tels que $0 < x \leq y$. On pose :

$$m = \frac{x+y}{2}, \quad g = \sqrt{xy}, \quad h = \frac{2}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}.$$

L'objectif de l'exercice est de montrer la chaîne d'inégalités : $x \leq h \leq g \leq m \leq y$.

1. Montrer que $m \leq y$.
2. Montrer que $g \leq m$.
3. Montrer que $x \leq h$. (Indication : on pourra chercher à comparer $1/x$ et $1/h$).
4. Montrer que $h \leq g$.

Exercice 1-106 Soit a et b deux réels avec $0 < a < b$ et $n \in \mathbb{N}^*$ un entier. L'objectif est d'étudier le sens de variation du k -ème terme du développement de $(a+b)^n$. Plus précisément, pour chaque indice k variant entre 0 et n , on note $u_k = \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$ et on s'intéresse à la liste de réels (u_0, \dots, u_n) .

1. Montrer que pour tout entier $k \in \{0, \dots, n-1\}$, $\frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{n-k}{k+1} \frac{b}{a}$.
2. Montrer que pour tout $k \in \{0, \dots, n-1\}$, $\frac{u_{k+1}}{u_k} = 1 \iff k = \frac{nb-a}{a+b}$ et $\frac{u_{k+1}}{u_k} > 1 \iff k < \frac{nb-a}{a+b}$.
3. Dans cette question, on suppose que $n < \frac{b}{a}$. Montrer que $u_0 < u_1 < u_2 < \dots < u_n$.
4. Dans cette question, on suppose que $n = \frac{b}{a}$. Montrer que $u_0 < u_1 < u_2 < \dots < u_{n-1} = u_n$.
5. (Question plus difficile demandant de l'initiative). Et quand $n > \frac{b}{a}$, comment se comporte la liste (u_0, \dots, u_n) ?

Exercice 1-107

1. On rappelle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$.

$$(a) \text{ Soit } n \in \mathbb{N}^*. \text{ Calculer } S_n = \sum_{k=1}^n (k-1)k.$$

$$(b) \text{ On pose } v_k = k(k-1)(k-2).$$

$$\text{i. Montrer que pour tout } k \in \mathbb{N}^*, v_{k+1} - v_k = 3k(k-1).$$

$$\text{ii. Calculer alors } T_n = \sum_{k=1}^n (v_{k+1} - v_k).$$

$$\text{iii. En déduire un lien entre } S_n \text{ et } T_n.$$

$$2. \text{ Soit } n \in \mathbb{N}, \text{ calculer } C = \sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^n 2^{k-l}.$$