Feuille 3 : Bases de logique (correction)

Exercice 3.1

P	Q	$P \Rightarrow Q$	non $(P \Rightarrow Q)$
0	0	1	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	1	1	0

P	Q	non Q	P ou (non Q)
0	0	1	1
0	1	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1

Exercice 3.2

P	Q	R	non R	$P \Rightarrow Q$	(non R) et P	$(P \Rightarrow Q)$ ou ((non R) et P))
0	0	0	1	1	0	1
0	0	1	0	1	0	1
0	1	0	1	1	0	1
0	1	1	0	1	0	1
1	0	0	1	0	1	1
1	0	1	0	0	0	0
1	1	0	1	1	1	1
1	1	1	0	1	0	1

Exercice 3.3

1.

$$\begin{aligned} P \Rightarrow (Q \Rightarrow R) \quad &\text{équivaut à} \quad (\text{non } P) \text{ ou } (Q \Rightarrow R) \\ &\text{équivaut à} \quad (\text{non } P) \text{ ou } ((\text{non } Q) \text{ ou } R) \\ &\text{équivaut à} \quad ((\text{non } P) \text{ ou } (\text{non } Q)) \text{ ou } R \\ &\text{équivaut à} \quad (\text{non}(P \text{ et } Q)) \text{ ou } R \\ &\text{équivaut à} \quad (P \text{ et } Q) \Rightarrow R \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} (P \text{ ou } Q) \Rightarrow R \quad &\text{équivaut à} \quad \text{non}(P \text{ ou } Q) \text{ ou } R \\ &\text{équivaut à} \quad ((\text{non } P) \text{ et } (\text{non } Q)) \text{ ou } R \\ &\text{équivaut à} \quad ((\text{non } P) \text{ ou } R) \text{ et } ((\text{non } Q) \text{ ou } R) \\ &\text{équivaut à} \quad (P \Rightarrow R) \text{ et } (Q \Rightarrow R) \end{aligned}$$

Exercice 3.4

$P \Rightarrow (Q \Rightarrow (P \text{ et } Q))$
équivaut à (non P) ou ((non Q) ou (P et Q))
équivaut à ((non P) ou (non Q)) ou (P et Q).
équivaut à ((non (P et Q)) ou (P et Q).
C'est une tautologie car (non S) ou S l'est.
En conclusion, $P \Rightarrow (Q \Rightarrow (P \text{ et } Q))$ est une tautologie.

Exercice 3.5

Si tout le monde a les yeux bleus, alors on peut choisir n'importe quelle personne comme étant P, l'implication est vérifiée. S'il existe une personne qui n'a pas les yeux bleus, alors on la choisit comme étant P, et l'implication est vérifiée, puisque l'assertion "P a les yeux bleus" est fausse.

Exercice 3.6

1. $\forall x \in \mathcal{E}, \exists i \in \mathcal{S}, h_i(x) \leqslant 8$
2. $\exists x \in \mathcal{E}, \forall i \in \mathcal{S}, h_i(x) > 8$. Il existe au moins un étudiant qui se réveille tous les jours après 8 heures.

Exercice 3.7

1. $\exists x \in E,\ (x \in A \text{ et } x \in B)$
2. $\forall x \in E,\ (x \in A \implies x \in B)$
3. $\exists x \in E,\ (x \in A \text{ et } x \notin B)$
4. $\forall x \in E, x \notin A$

Exercice 3.8 L'ensemble E a une infinité d'éléments car $E = [0, 1[$. L'ensemble F a un seul élément car $F = \{0\}$.

Exercice 3.9

1. $\forall M \in \mathbf{R},\ \ \exists x \in \mathbf{R},\ \ |f(x)| > M$.
2. « La fonction f est croissante »s'écrit :

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbf{R},\ \ (x_1 \leqslant x_2) \implies (f(x_1) \leqslant f(x_2)).$$

« La fonction f n'est pas croissante »s'écrit :

$$\exists x_1, x_2 \in \mathbf{R},\ \ (x_1 \leqslant x_2) \text{ et } (f(x_1) > f(x_2)).$$

« La fonction f est décroissante »s'écrit :

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbf{R},\ \ (x_1 \leqslant x_2) \implies (f(x_1) \geqslant f(x_2)).$$

Exercice 3.10 Soit $\mathcal{P}_n$ la propriété : ($u_n \leq 3^n$ et $u_{n+1} \leq 3^{n+1}$). Montrons cette propriété par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

- (Initialisation) La propriété $\mathcal{P}_0$ est vraie : $1 \leq 3^0$ et $3 \leq 3^1$.
- (Hérédité) Soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons $\mathcal{P}_n$ vraie. Alors

$$u_{n+2} = 4u_n + u_{n+1} \leq 4.3^n + 3^{n+1} = 7.3^n \leq 3^{n+2}\ .$$

  De plus, d'après $\mathcal{P}_n$, $u_{n+1} \leq 3^{n+1}$. La propriété $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}_n$ est donc vraie.

Nous avons ainsi démontré que $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 3.11 Soit $P(n)$: "$u_n = 3^n - 2^{n+1}$". On a :
$P(0)$: "$u_0 = 3^0 - 2^1 = -1$".
$P(1)$: "$u_1 = 3^1 - 2^2 = -1$".
Donc $P(0)$ et $P(1)$ sont vraies.
Soit $n \geq 2$. On suppose $P(k)$ vraie pour tout entier naturel $k < n$.
On a $u_n = 5u_{n-1} - 6u_{n-2} = 5(3^{n-1} - 2^n) - 6(3^{n-2} - 2^{n-1}) = 5.3^{n-1} - 6.3^{n-2} - 5.2^n + 6.2^{n-1}$
$u_n = 5.3^{n-1} - 2.3^{n-1} - 5.2^n + 3.2^n = 3.3^{n-1} - 2.2^n = 3^n - 2^{n+1}$.
Ainsi $P(n)$ est vraie.
En conclusion $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

Exercice 3.12 Pour un entier naturel $n \geqslant 1$, désignons par $H(n)$ la propriété

$$\forall m \in \mathbb{N},\ \ (1 \leqslant m \leqslant n \implies u_m = 2^{m-1}).$$

Nous allons la démontrer par récurrence.

— (Initialisation) La propriété $H(1)$ est vraie car $u_1 = u_0 = 1 = 2^0 = 2^{1-1}$.

— (Hérédité) Supposons que $H(n)$ soit vraie pour un certain entier $n \geqslant 1$. Soit m un nombre entier compris entre 1 et $n+1$. Si $m \leqslant n$, alors $u_m = 2^{m-1}$ en vertu de $H(n)$. Si $m = n+1$, alors

$$u_m = u_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + \sum_{k=1}^{n} u_k = 1 + \sum_{k=1}^{n} 2^{k-1} = 1 + \sum_{k=0}^{n-1} 2^k = 1 + (2^n - 1) = 2^n = 2^{m-1}.$$

La propriété $H(n+1)$ est donc vraie.

Nous avons démontré la propriété $H(n)$ pour tout entier $n \geqslant 1$; en particulier, $u_n = 2^{n-1}$ pour tout $n \geqslant 1$.

Exercice 3.13

1. Supposons $n \geqslant 3$ et $P(n)$ vraie. Alors

$$2^{n+1} - (n+1)^2 = 2 \cdot 2^n - (n+1)^2 > 2n^2 - (n+1)^2 = n^2 - 2n - 1 > 0$$

car les racines du trinôme $X^2 - 2X - 1$ sont $1 - \sqrt{2}$ et $1 + \sqrt{2}$, et $1 + \sqrt{2} < 1 + 2 = 3$. La propriété $P(n+1)$ est donc démontrée.

2. Les propriétés $P(0)$ et $P(1)$ sont vraies car $2^0 = 1 > 0^2$ et $2^1 = 2 > 1^2$. Les propriétés $P(2), P(3)$ et $P(4)$ sont fausses car $2^2 = 4 = 2^2$, $2^3 = 8 < 9 = 3^2$ et $2^4 = 16 = 4^2$.

La propriété $P(5)$ est vraie car $2^5 = 32 > 25 = 5^2$. On en déduit que la propriété $P(n)$ est alors vraie pour tout entier $n \geqslant 5$, en raisonnant par récurrence : la propriété $P(5)$ est vraie (initialisation) et, si $P(n)$ est vraie pour un certain $n \geqslant 5$, alors $P(n+1)$ est vraie en vertu de la question précédente (hérédité).

Exercice 3.14 Pour tout entier $n \geqslant 2$, désignons par $P(n)$ la propriété « *tout nombre entier m tel que $2 \leqslant m \leqslant n$ est un produit de nombres premiers* ». Nous allons démontrer que $P(n)$ est vraie pour tout $n \geqslant 2$ en raisonnant par récurrence.

— La propriété $P(2)$ est vraie car 2 est un nombre premier.

— Supposons que $P(n)$ soit vraie pour un certain entier $n \geqslant 2$. Pour démontrer $P(n+1)$, il suffit de prouver que $n+1$ est un produit de nombres premier. Si $n+1$ est premier, c'est vrai. Sinon, nous pouvons écrire $n+1 = ab$ avec a, b deux entiers tels que $2 \leqslant a, b \leqslant n$. Chacun des entiers a, b est un produit de nombres premiers en vertu de $P(n)$, donc leur produit également.
Dans tous les cas de figure, $n+1$ est un produit de nombres premiers et la propriété $P(n+1)$ est vraie.

La propriété $P(n)$ est donc vraie pour tout nombre entier $n \geqslant 2$. En particulier, tout nombre entier $n \geqslant 2$ est un produit de nombres premiers.

Exercice 3.15

1. On va démontrer le principe des tiroirs en raisonnant par l'absurde. Supposons que cela soit faux. Il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que l'on puisse ranger $n+1$ paires de chaussettes dans n tiroirs avec au plus 1 paire de chaussettes dans chaque tiroir. Soit T_i le nombre de chaussettes dans le tiroir i. On compte alors les paires de chaussettes :

$$n+1 = \sum_{i=1}^{n} T_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} 1 = n$$

et nous aboutissons à une contradiction. Le principe des tiroirs est donc vrai.

2. Les vingt-six lettres de l'alphabet latin permettent de former $26^4 + 26^3 + 26^2 + 26 = 475\ 254$ mots différents d'au plus quatre lettres. Donc les 500 000 mots de ce fichiers ne peuvent pas être tous différents car $475\ 254 < 500\ 000$.

Exercice 3.16 Soit E l'ensemble des pays et soit $f : E \to \mathbb{N}$ l'application associant à chaque pays son nombre de voisins. Notons $n = \mathrm{Card}(E)$ le nombre de pays (supposé fini). Puisque chaque pays a au moins un voisin et au plus $n-1$ voisins, l'application f est à valeurs dans l'ensemble $\{1, \ldots, n-1\}$. Comme

$$\mathrm{Card}\left(\{1, \ldots, n-1\}\right) = n - 1 < n = \mathrm{Card}(E),$$

l'application f ne peut pas être injective et il existe donc deux pays distincts ayant le même nombre de voisins.

Exercice 3.17 Soit $n \geqslant 1$ un entier naturel. On se donne $n+1$ nombres réels $x_0, x_1, \ldots, x_n$ dans $[0,1]$ vérifiant $0 \leq x_0 \leq x_1 \leq \ldots \leq x_n \leq 1$. On veut démontrer par l'absurde la propriété suivante : « *deux de ces réels sont distants de moins de* $\dfrac{1}{n}$ ».

1. $\exists i \in [\![1,n]\!]$, $x_i - x_{i-1} \leqslant \dfrac{1}{n}$
2. $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $x_i - x_{i-1} > \dfrac{1}{n}$
3. Supposons que la propriété (P) soit fausse, auquel cas $x_i - x_{i-1} > \dfrac{1}{n}$ pour tout $i \in \{2,\ldots,n\}$. En sommant, on obtient :

$$x_n - x_0 = \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1}) > \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n} = 1 \ .$$

Or $x_n - x_0 \leq 1$. Contradiction !
On a donc : $\exists i \in [\![1,n]\!]$, $x_i - x_{i-1} \leqslant \dfrac{1}{n}$.

Exercice 3.18 Nous allons démontrer l'irrationalité de $\sqrt{2}$ en raisonnant par l'absurde. Supposons donc que $\sqrt{2}$ soit un nombre rationnel et écrivons $\sqrt{2} = \dfrac{p}{q}$ avec $p, q \in \mathbb{N}$ non nuls.

1. Si $\sqrt{2} = \dfrac{p}{q}$, alors $p = \sqrt{2} \cdot q$ et $p^2 = 2q^2$.
2. Soit d le pgcd de p et q. Nous pouvons écrire $p = dp'$ et $q = dq'$, où p' et q' sont deux entiers premiers entre eux. Puisque $\sqrt{2} = \dfrac{p}{q} = \dfrac{p'}{q'}$, nous pouvons remplacer p, q par p', q' et donc nous ramener au cas où p et q sont premiers entre eux. C'est ce que l'on suppose par la suite.
3. L'égalité $p^2 = 2q^2$ montre que p^2 est pair. On en déduit que p est pair car un nombre entier et son carré ont la même parité.
4. Comme p est pair, nous pouvons écrire $p = 2u$. De $p^2 = 2q^2$, nous déduisons $4u^2 = 2q^2$ puis $q^2 = 2u^2$. Le nombre entier q est donc pair.
5. Les deux entiers p et q sont pairs. Comme nous avions supposés p et q premiers entre eux, nous avons abouti à une contradiction.

Le nombre réel $\sqrt{2}$ est donc irrationnel.

Exercice 3.19

1. Si Jules ment, alors ce qu'il dit est faux et donc tous les deux disent la vérité. Ceci est une contradiction, donc Jules est sincère. Puisque Jules est sincère, ce qu'il dit est vrai et l'un des deux est un menteur ; comme ce n'est pas Jules, c'est donc Jim.
2. Si Anne est sincère, alors ce qu'elle dit est vrai et toutes les trois sont des menteuses ; en particulier, Anne est une menteuse et ceci est une contradiction. Anne est donc une menteuse.
   Puisque Anne ment, ce qu'elle dit est faux et l'une des trois (au moins) n'est pas une menteuse. Si Émilie ment, alors ce qu'elle dit est faux et donc au moins deux d'entre elles sont sincères. Comme Anne ment, il s'agit nécessairement de Charlotte et d'Émilie et nous aboutissons à une contradiction au sujet de cette dernière. Émilie est donc sincère.
   Comme Émilie est sincère, ce qu'elle dit est vrai et une seule des trois est sincère. Il s'agit donc d'Émilie, ce qui signifie que Charlotte est une menteuse.

Exercice 3.20 (Observations préliminaires) La droite (D_1) d'équation $x + y = 1$ est la droite passant par les points de coordonnées $(0,1)$ et $(1,0)$. La partie P_1 est le demi-plan délimité par cette droite et contenant le point $(0,0)$.

La droite (D_2) d'équation $x - y = 1$ est la droite passant par les points de coordonnées $(0,-1)$ et $(1,0)$. La partie P_2 est le demi-plan délimité par cette droite et contenant le point $(0,0)$.

La droite (D_3) d'équation $-x + y = 1$ est la droite passant par les points de coordonnées $(0,1)$ et $(-1,0)$. La partie P_3 est le demi-plan délimité par cette droite et contenant le point $(0,0)$.

La droite (D_4) d'équation $-x - y = 1$ est la droite passant par les points de coordonnées $(-1,0)$ et $(0,-1)$. La partie P_4 est le demi-plan délimité par cette droite et contenant le point $(0,0)$.

1. La partie $P_1 \cap P_2$ est le demi-cône de sommet $(1,0)$, délimité par les droites (D_1) et (D_2), et contenant $(0,0)$. La partie $P_3 \cap P_4$ est le demi-cône de sommet $(-1,0)$, délimité par les droites (D_3) et (D_4), et contenant $(0,0)$. La partie $(P_1 \cap P_2) \cap (P_3 \cap P_4)$ est le carré plein de sommets $(0,1), (1,0), (0,-1)$ et $(-1,0)$.
2. On peut observer sur un dessin les relations

$$(P_1 \cup P_2)^c = P_1^c \cap P_2^c \subsetneq (P_1 \cap P_2)^c = P_1^c \cup P_2^c.$$

Toutes se démontrent facilement en revenant aux définitions des symboles $\cap, \cup, {}^c$.

Exercice 3.21 Les éléments du produit cartésien $A \times B$ sont tous les couples (a_i, b_j) avec $1 \leqslant i \leqslant 3$ et $1 \leqslant j \leqslant 4$; il y en a $3 \times 4 = 12$.

L'ensemble $A \times B$ contient $2^{12} = 4\,096$ parties.

Exercice 3.22

1. $\mathcal{P}(E) = \{\varnothing, \{1\}, \{5\}, E\}$
$\mathcal{P}(E \cap G) = \{\varnothing, \{1\}\}$
$\mathcal{P}(F \cap G) = \{\varnothing\}$
$\mathcal{P}(E \cup G) = \{\varnothing, \{1\}, \{4\}, \{5\}, \{1,4\}, \{1,5\}, \{4,5\}\{1,4,5\}\}$
2. $\mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(F) = \{(\varnothing,\varnothing), (\varnothing,\{2\}), (\varnothing,\{3\}), (\varnothing,F), (\{1\},\varnothing), (\{1\},\{2\}), (\{1\},\{3\}), (\{1\},F),$
$(\{5\},\varnothing), (\{5\},\{2\}), (\{5\},\{3\}), (\{5\},F), (E,\varnothing), (E,\{2\}), (E,\{3\}), (E,F)\}$.
$\mathcal{P}(F \times (E \cap G)) = \{\varnothing, \{(2,1)\}, \{(3,1)\}, \{(2,1),(3,1)\}\}$.
3. L'ensemble $\mathcal{P}(E)$ contient quatre éléments, donc $\mathcal{P}(\mathcal{P}(E))$ en contient $2^4 = 16$. Les voici :

$$\varnothing, \{\varnothing\}, \{\{1\}\}, \{\{5\}\}, \{E\}, \{\varnothing, \{1\}\}, \{\varnothing, \{5\}\}, \{\varnothing, E\}, \{\{1\}, \{5\}\}, \{\{1\}, E\}, \{\{5\}, E\},$$

$$\{\varnothing, \{1\}, \{5\}\}, \{\varnothing, \{1\}, E\}, \{\varnothing, \{5\}, E\}, \mathcal{P}(E).$$

Exercice 3.23

1. Si $a_0 \notin A$, alors $f(A) = A \cup \{a_0\}$ contient un élément de plus que A et donc $\mathrm{Card}(f(A)) = \mathrm{Card}(A) + 1$. Si $a_0 \in A$, alors $f(A) = A \setminus \{a_0\}$ contient un élément de moins que A et donc $\mathrm{Card}(f(A)) = \mathrm{Card}(A) - 1$. Dans tous les cas de figure, $\mathrm{Card}(f(A))$ et $\mathrm{Card}(A)$ sont de parités différentes.
2. Soit A une partie de E. Si $a_0 \notin A$, alors $f(A) = A \cup \{a_0\}$ est une partie de E contenant a_0 et donc $f(f(A)) = f(A) \setminus \{a_0\} = A$. Si $a_0 \in A$, alors $f(A) = A \setminus \{a_0\}$ est une partie de E contenant a_0 et donc $f(f(A)) = f(A) \cup \{a_0\} = A$. Dans tous les cas de figure,

$$(f \circ f)(A) = f(f(A)) = A.$$

3. Nous avons obtenu $f \circ f = \mathrm{id}_{\mathcal{P}(E)}$ à la question précédente, donc f est une bijection (on peut appliquer la question 6(c) de l'exercice 2-11, ou bien plus simplement observer que f est sa propre bijection réciproque).
4. Soit $\mathcal{P}(E)_p$ l'ensemble des parties de E de cardinal pair et $\mathcal{P}(E)_i$ l'ensemble des parties de E de cardinal impair. Puisque f est une bijection telle que $f(\mathcal{P}(E)_p) = \mathcal{P}(E)_i$, l'application f réalise une bijection entre $\mathcal{P}(E)_p$ et $\mathcal{P}(E)_i$. On en déduit que les deux ensembles finis $\mathcal{P}(E)_p$ et $\mathcal{P}(E)_i$ ont le même cardinal, c'est-à-dire que E contient autant de parties de cardinal pair que de parties de cardinal impair.

Exercice 3.24

1. Pour $a \in E$, $f(a)$ est une partie de E ($f(a) \in \mathcal{P}(E)$), en particulier $f(a)$ contient des éléments de E (important pour comprendre la question suivante).
2. A est une partie de E, et comme f est surjective, on peut par définition lui trouver un antécédent a par f (c'est à dire que $a \in E$ et $f(a) = A$). Raisonnons par l'absurde : si $a \in A$, cela signifie que $a \notin f(a)$. Or $f(a) = A$, donc $a \notin A$, ce qui est aburde. De même si $a \notin A$, cela signifie que $a \in f(a)$. Or $f(a) = A$, donc $a \in A$, ce qui est absurde. On en conclue que notre hypothèse de départ est erronée : il n'existe pas d'application de E dans $\mathcal{P}(E)$ qui soit surjective.

Exercice 3.25

1. L'ensemble $A \times B$ est la partie de $E \times F$ formée des couples (e, f) tels que $e \in A$ et $f \in B$.
2. Notons x_1, x_2 deux éléments distincts de E et y_1, y_2 deux éléments distincts de F. L'ensemble $X = \{(x_1, y_1), (x_2, y_2)\}$ est une partie de $E \times F$ qui n'est pas de la forme $A \times B$ avec $A \subset E$ et $B \subset F$. On peut le justifier en raisonnant par l'absurde. Si $X = A \times B$, alors nécessairement A contient x_1 et x_2 puisque $A \times B$ contient (x_1, y_1) et (x_2, y_2) ; de même, B doit contenir y_1 et y_2. On en déduit alors que $A \times B$ contient les quatre éléments $(x_1, y_1), (x_1, y_2), (x_2, y_1)$ et (x_2, y_2), ce qui n'est pas le cas.

Exercice 3.26

1. Soit E un ensemble à m éléments et F un ensemble à n éléments. Se donner une partie de $E \cup F$ équivaut à se donner une partie X de E et une partie Y de F, puis à considérer $X \cup Y$. Autrement dit, l'application
$$f : \mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(F) \to \mathcal{P}(E \cup F), \quad (X, Y) \mapsto X \cup Y$$
est une bijection dont la bijection réciproque est l'application
$$\mathcal{P}(E \cup F) \to \mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(F), \quad Z \mapsto (Z \cap E, Z \cap Y).$$
Avec les notations précédentes, $\mathrm{Card}(X \cup Y) = \mathrm{Card}(X) + \mathrm{Card}(Y)$. Ainsi, le sous-ensemble $\mathcal{P}_k(E \cup F)$ des parties à k éléments de $E \cup F$ est en bijection via f avec la réunion des sous-ensembles $\mathcal{P}_i(E) \times \mathcal{P}_{k-i}(F)$, avec $0 \leqslant i \leqslant k$. On en déduit l'identité
$$\begin{aligned}
\binom{n+m}{k} &= \mathrm{Card}(\mathcal{P}_k(E \cup F)) \\
&= \mathrm{Card}\left(\bigcup_{i=0}^{k} \mathcal{P}_i(E) \times \mathcal{P}_{k-i}(F)\right) \\
&= \sum_{i=0}^{k} \mathrm{Card}(\mathcal{P}_i(E)) \times \mathcal{P}_{k-i}(F) \\
&= \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i}\binom{m}{k-i}
\end{aligned}$$
2. Il suffit d'appliquer l'identité précédente avec $k = m = n$ et d'utiliser l'égalité $\binom{n}{n-i} = \binom{n}{i}$.

Exercice 3-101

1. P NAND Q = non(P et Q)

P	Q	P et Q	P NAND Q
0	0	0	1
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	0

2. (a) non P = non(P et P) = P NAND P
   (b) P et Q = non(P NAND Q) = (P NAND Q) NAND (P NAND Q)
   (c) P ou Q = (non(non P)) ou (non(non Q)) = non$\Big($(non P) et (non Q)$\Big)$
   = (non P) NAND (non Q) = (P NAND P) NAND (Q NAND Q)
3. P NOR Q = non(P ou Q)

P	Q	P ou Q	P NOR Q
0	0	0	1
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	1	0

(a) non $P = \text{non}(P \text{ ou } P) = P \text{ NOR } P$

(b) P ou $Q = \text{non}(P \text{ NOR } Q) = (P \text{ NOR } Q) \text{ NOR } (P \text{ NOR } Q)$

(c) P et $Q = (\text{non}(\text{non } P)) \text{ et } (\text{non}(\text{non } Q)) = \text{non}\Big((\text{non } P) \text{ ou } (\text{non } Q)\Big)$
$= (\text{non } P) \text{ NOR } (\text{non } Q) = (P \text{ NOR } P) \text{ NOR } (Q \text{ NOR } Q)$

Exercice 3-102

1. Les parties X de E contenant A sont en bijection avec les parties Y de A^c via l'application
$$\Psi : \mathcal{P}(A^c) \to \mathcal{P}(E)$$
$$Y \mapsto A \cup Y$$
Il y a donc 2^{n-p} parties de E contenant A.
2. Les parties de E à m éléments contenant A sont en bijection avec les parties de A^c à $m-p$ éléments ; il y en a donc $\binom{n-p}{m-p}$.
3. Les couples (X, Y) de parties de E telles que $X \cap Y = A$ sont en bijection avec les couples (X', Y') de parties de A^c telles que $X' \cap Y' = \varnothing$ via l'application
$$\Theta : \mathcal{P}(A^c) \times \mathcal{P}(A^c) \to \mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(E)$$
$$(X', Y') \mapsto (A \cup X', A \cup Y')$$
Il y en a donc 3^{n-p}. En effet, si F est un ensemble à m éléments, alors il existe 3^m couples (X', Y') de parties de F telles que $X' \cap Y' = \varnothing$. Pour le démontrer, notons C_m le nombre de tels couples et observons que la condition $Y' \cap X'$ équivaut à $Y' \subset X'^c$; il s'agit donc de dénombrer les couples (X', Y') formés d'une partie X' de F et d'une partie Y' de X'^c. On en déduit :
$$C_m = \sum_{X' \subset F} \text{Card}(\mathcal{P}(X'^c)) = \sum_{X' \subset F} 2^{m - \text{Card}(X')} = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} 2^{m-k} = (1+2)^m = 3^m.$$

Exercice 3-103 Cette identité se démontre simplement par récurrence.

— Elle est vraie lorsque $n = 0$ car $u_0 = 1 = \dfrac{2^1 - 1}{2^0}$.

— Soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons la formule vraie pour u_n. Si $n+1$ est pair, alors n est impair et $u_{n+1} = u_n + 1$. En écrivant $n = 2k+1$, l'hypothèse de récurrence permet d'écrire
$$u_{n+1} = u_n + 1 = \frac{2^{k+1} - 1}{2^{k+1}} + 1 = \frac{2^{k+2} - 1}{2^{k+1}}$$
ce qui est bien la formule souhaitée pour $n + 1 = 2(k+1)$.
Si $n+1$ est impair, alors n est pair et $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{2}$. En écrivant $n = 2k$, l'hypothèse de récurrence permet d'écrire
$$u_{n+1} = \frac{u_n}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2^{k+1} - 1}{2^k} = \frac{2^{k+1} - 1}{2^{k+1}},$$
ce qui est bien la formule souhaitée pour $n + 1 = 2k + 1$.

Exercice 3-104 1. On dénombre ces n-uplets en fonction de la valeur de la coordonnée x_p, qui est un nombre entier compris entre 0 et n :
$$\begin{aligned} D(p,n) &= \sum_{k=0}^{n} \text{Card}(\{(x_1, \ldots, x_p) \in \mathbb{N}^p \mid x_1 + \ldots + x_p = n \text{ et } x_p = k\}) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \text{Card}(\{(x_1, \ldots, x_{p-1}) \in \mathbb{N}^{p-1} \mid x_1 + \ldots + x_{p-1} = n - k\}) \\ &= \sum_{k=0}^{n} D(p-1, n-k). \end{aligned}$$

2. On peut déduire de la question précédente l'identité

$$D(p,n) = \binom{n+p-1}{p-1}$$

en raisonnant par récurrence sur $p \geqslant 1$. L'entier $n \in \mathbb{N}$ est fixé.

— L'équation $x_1 = n$ a une unique solution dans $\mathbf{N}$, donc $D(n,1) = 1$. Comme $\binom{1+p-1}{1-1} = 1$, la formule est démontrée pour $p = 1$.

— Supposons que la formule soit démontrée pour un certain entier $p \geqslant 1$. D'après la question précédente et l'hypothèse de récurrence, nous pouvons écrire :

$$D(p+1,n) = \sum_{k=0}^{n} D(p,n-k) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n-k+p-1}{p-1} = \sum_{\ell=0}^{n} \binom{p-1+\ell}{p-1}.$$

Il s'agit de la somme de tous les coefficients binomiaux situés sur la colonne $p-1$ du triangle de Pascal, de la ligne $p-1$ à la ligne $n+p-1$. On en déduit

$$D(p+1,n) = \binom{n+p}{p}$$

en vertu de la formule classique [1]

$$\sum_{\ell=0}^{b} \binom{a+\ell}{a} = \binom{a+b+1}{a+1}$$

pour tous les entiers naturels a, b.

Exercice 3-105

1. Un élément x de E appartient à $A \triangle B$ si et seulement si $x \in A \cup B$ — c'est-à-dire x appartient à A ou B — et $x \notin A \cap B$ — c'est-à-dire x n'appartient pas à A et B. Cela revient à dire que x appartient à $A \setminus B$ ou à $B \setminus A$, donc $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.
2. (Unicité) Si une telle partie X existe, alors $X = X \triangle X = \varnothing$ en vertu de la condition appliquée à la partie $A = X$.
   (Existence) Vérifions que la partie $X = \varnothing$ satisfait à notre condition. Pour toute partie A de E, $A \triangle \varnothing = (A \cup \varnothing) \setminus (A \cap \varnothing) = A \setminus \varnothing = A$.
3. (Unicité) Fixons une partie A de E et supposons que A' soit une partie de E telle que $A \triangle A' = E$. Alors, par la définition de l'opération $\triangle$, nous obtenons $A \cup A' = E$ et $A \cap A' = \varnothing$, c'est-à-dire $A' = A^c$.
   (Existence) Pour toute partie A de E, nous avons immédiatement $A \triangle A^c = (A \cup A^c) \setminus (A \cap A^c) = E$.

Exercice 3-106

1. L'implication de gauche à droite est évidente. Pour obtenir l'implication réciproque, il suffit d'observer que l'on peut écrire $A = \{x \in E \mid f_A(x) = 1\}$.
2. La condition $A \subset B$ équivaut à la condition $f_A \leqslant f_B$.
3. On vérifie immédiatement les identités

$$f_{A \cap B} = f_A f_B = \min\{f_A, f_B\}, \quad f_{A \cup B} = \max\{f_A, f_B\} \quad \text{et} \quad f_{A^c} = 1 - f_A.$$

4. On a $f_{A \triangle B} = \max\{f_A, f_B\} - \min\{f_A, f_B\} = f_A + f_B - 2 f_A f_B$.
5. Si A et X sont deux parties de E, la condition $A \triangle X = A$ se traduit en termes de fonctions caractéristiques par $f_X + f_A - 2 f_A f_X = f_A$, c'est-à-dire $f_X(1 - 2f_A) = 0$. Cette condition est vérifiée pour toute partie A de E si $f_X = 0$, et c'est la seule possibilité puisqu'on obtient $f_X = 0$ en faisant $A = \varnothing$. Comme $0 = f_\varnothing$, on retrouve ainsi le résultat de la question 2 de l'exercice précédent.
   De manière analogue, la condition $A \triangle A' = E$ se traduit par $f_A + f_{A'} - 2 f_A f_{A'} = 1$, c'est-à-dire $f_{A'}(1 - 2f_A) = 1 - f_A$. En passant aux valeurs absolues, on en déduit $f_{A'} = 1 - f_A = f_{A^c}$ car $|1 - 2f_A| = 1$, donc $A' = A^c$.

1. Qui peut se démontrer en raisonnant par récurrence sur b, grâce à l'identité $\binom{m}{j} + \binom{m}{j+1} = \binom{m+1}{j+1}$

Exercice 3-107

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ on désigne par $P(n)$ la propriété suivante "le nombre d'applications d'un ensemble de cardinal n dans un ensemble fini B est $\mathrm{Card}(B)^n$."

   (Initialisation) : Soit A un ensemble de cardinal 1. Alors se donner une application de A dans B revient à choisir l'image dans B de l'unique élément de A ; il y a $\mathrm{Card}(B)$ choix possibles. La propriété $P(1)$ est donc vraie.

   (Hérédité) Soit $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 1$ et supposons $P(m)$ vraie. Soit A un ensemble à $m+1$ éléments. Fixons un élément a_0 dans A. Se donner une application de A dans B revient à se donner une application g de $A \setminus \{a_0\}$ dans B, puis à choisir l'image b_0 de a_0 dans B ; il y a $\mathrm{Card}(B)^m$ choix pour g et $\mathrm{Card}(B)$ choix pour b_0, donc il y a au final

   $$\mathrm{Card}(B)^m \cdot \mathrm{Card}(B) = \mathrm{Card}(B)^{m+1}$$

   applications de A dans B [2]. La propriété $P(m+1)$ est donc vraie. On en déduit que $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq 1$.

2. Désignons par $\{0,1\}^E$ l'ensemble des applications de E dans $\{0,1\}$. L'application

   $$\mathcal{P}(E) \to \{0,1\}^E, \quad A \mapsto f_A$$

   est une bijection : elle est injective d'après la question 1 de l'exercice précédent, et elle est surjective car, si f est une application de E dans$\{0,1\}$, alors $f = f_A$ avec $A = \{x \in E \mid f(x) = 1\} = f^{-1}(1)$. On en déduit

   $$\mathrm{Card}(\mathcal{P}(E)) = \mathrm{Card}\left(\{0,1\}^E\right) = 2^{\mathrm{Card}(E)}.$$

2. Ce calcul de cardinal justifie la notation B^A utilisée usuellement pour désigner l'ensemble des applications d'un ensemble A dans un ensemble B.