

## Feuille 5 : Nombres complexes

**Exercice 5-1.** Calculer la partie réelle et la partie imaginaire des nombres complexes suivants :

- a)  $z = 4 + 5i$ ,      b)  $z = (-2 + 2i) + (5 + 3i)$ ,      c)  $z = (-3 - 7i)(1 - 2i)$ ,  
 d)  $z = (4 + 5i)(5 + 3i)(1 - 2i)$ ,      e)  $z = \frac{4 - 3i}{5 + 2i}$ ,      f)  $z = \frac{(4 - 3i)(1 - 2i)}{7 - 3i}$ ,  
 g)  $z = \frac{(7 + 6i)(-3 - 2i)}{2 + i} + 4 + 6i$ .

**Exercice 5-2.** Calculer la partie réelle et la partie imaginaire de  $z = \frac{1 + im}{2m + i(m^2 - 1)}$  pour  $m \in \mathbb{R}$ .

**Exercice 5-3.** Soit  $z \in \mathbb{C}$ . Exprimer le conjugué des nombres complexes suivants en fonction de  $Re(z)$  et  $Im(z)$  :

- a)  $z + 1$ ,      b)  $z^2 + 3i$ ,      c)  $\bar{z} + 2z$ ,      d)  $\bar{z} + z - i$ ,  
 e)  $z^3 + 1$ ,      f)  $iz^2 - 3\bar{z}$ ,      g)  $z - \bar{z} + iz$ ,      h)  $z^2 - i\bar{z} + 4$ .

**Exercice 5-4.**

1. Calculer le module des nombres complexes suivants :

- a)  $z = 2 + 5i$ ,      b)  $z = -3 + 2i$ ,      c)  $z = (3 - 2i)(9 + i)$ ,      d)  $z = \frac{2 + 5i}{5 - 2i}$ .

2. Exprimer le module des nombres complexes suivants à l'aide du module de  $z$  :

- a)  $z\bar{z}$ ,      b)  $2z^2$ ,      c)  $\frac{2}{\bar{z}}$ ,      d)  $3\frac{\bar{z}^2}{z}$ .

**Exercice 5-5.** Soit  $(z, z') \in \mathbb{C}^2$ . Établir la relation  $|z + z'|^2 + |z - z'|^2 = 2(|z|^2 + |z'|^2)$  et en donner une interprétation géométrique.

**Exercice 5-6.**

1. Représenter les points d'affixes suivantes dans le plan  $R = (O, \vec{i}, \vec{j})$

- a)  $z = 1 - i$ ,      b)  $\bar{z}$ ,      c)  $z + \bar{z}$ ,      d)  $z - \bar{z}$ .

2. Représenter les vecteurs suivants dans le plan  $R = (O, \vec{i}, \vec{j})$

- a)  $\vec{v}$  d'affixe  $2 + i$ ,      b)  $\vec{w}$  d'affixe  $-3 + 2i$ ,      c)  $\vec{v} + \vec{w}$ ,      d)  $2\vec{v} - \vec{w}$ .

**Exercice 5-7.** Déterminer l'ensemble des nombres complexes  $z$  tels que :

- a)  $|1 - z| \leq \frac{1}{2}$       b)  $\operatorname{Re}(1 - z) \leq \frac{1}{2}$       c)  $\operatorname{Re}(iz) \leq \frac{1}{2}$       d)  $\left|1 - \frac{1}{z}\right|^2 = 2$       e)  $\left|\frac{z - 3}{z + 3}\right| < 2$

**Exercice 5-8.** Soit  $x \in \mathbb{R}$ .

1. Calculer  $\cos(3x)$  en fonction de  $\cos(x)$ , puis  $\sin(3x)$  en fonction de  $\sin(x)$ .  
 2. Linéariser  $\sin^4(x)$  puis  $\cos(x)\sin^4(x)$ .

**Exercice 5-9.** Soient  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $\theta \in \mathbb{R}$ . Calculer

$$U_n = \sum_{k=0}^n \cos(k\theta) \text{ et } V_n = \sum_{k=0}^n \sin(k\theta)$$

### Exercice 5-10.

1. Calculer le module et un argument des nombres complexes suivants :

a)  $u = -3$ ,

b)  $v = 1 - i$ ,

c)  $w = \frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}+i}$ ,

d)  $z = \frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}$ .

2. En déduire le module et un argument de  $uw$  et  $\frac{z}{v}$ .

### Exercice 5-11. Soit $z = \sqrt{2+\sqrt{3}} + i\sqrt{2-\sqrt{3}}$ .

1. Calculer  $z^2$ , déterminer le module et un argument de  $z^2$  et écrire  $z^2$  sous forme trigonométrique.

2. En déduire le module et un argument de  $z$ .

3. En déduire une expression de  $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$  et  $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$ .

### Exercice 5-12.

1. Donner la forme trigonométrique de  $(1+i)^n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  (utiliser la formule de Moivre).

2. En déduire une expression très simple de  $(1+i)^n + (1-i)^n$ .

### Exercice 5-13. Soient $z \in \mathbb{C}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$ . Il existe exactement $n$ nombres complexes $w$ vérifiant $w^n = z$ . Ces nombres sont appelés les $n$ racines $n$ -ième de $z$ .

1. Représenter dans le plan complexe les 6 racines 6-ième de 1 et les 4 racines 4-ième de  $-1$ .

2. Soit  $n \geq 2$  un entier. Déterminer les  $n-1$  racines du polynôme complexe  $1+z+z^2+\dots+z^{n-1}$ .

### Exercice 5-14.

1. Déterminer les racines cubiques de 1 et les représenter dans le plan complexe.

2. On note  $j = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ . Montrer que  $1+j+j^2 = 0$ .

3. Exprimer les racines cubiques de 1 en fonction de  $j$ .

### Exercice 5-15.

1. Déterminer les racines carrées des nombres complexes suivants :

a)  $z = 7 + 24i$ ,

b)  $z = 9 + 40i$ ,

c)  $z = 1 + i$ .

2. Résoudre dans  $\mathbb{C}$  les équations suivantes :

a)  $z^2 = -2\sqrt{3} + 2i$ ,

b)  $z^2 = 3 - 4i$ .

### Exercice 5-16. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

a)  $iz^2 + (1-5i)z - 2 + 6i = 0$ ,

b)  $(1+2i)z^2 - (9+3i)z + 10 - 5i = 0$ ,

c)  $z^4 + 10z^2 + 169 = 0$ ,

d)  $z^3 + 3z - 2i = 0$ ,

e)  $z^6 - (3+2i)z^3 + 2 + 2i = 0$ ,

f)  $\bar{z}^7 = \frac{1}{z^2}$

g)  $z^5 - z = 0$ ,

h)  $27(z-1)^6 + (z+1)^6 = 0$ .

### Exercice 5-17.

1. Donner les applications de  $\mathbb{C}$  qui représentent les transformations du plan suivantes.

a) La translation du vecteur d'affixe  $-2 + i$ .

b) L'homothétie de rapport 3 et de centre  $1 + 2i$ .

c) La rotation d'angle  $\pi/6$  et de centre 1.

d) La symétrie centrale du centre  $i$ .

2. Identifier les transformations suivantes dans le plan complexe .

a)  $f_1 : z \mapsto z + 3 - 2i$ .   b)  $f_2 : z \mapsto e^{i\frac{2\pi}{7}} z$ .   c)  $f_3 : z \mapsto e^{i\frac{2\pi}{3}} z - 1$ .   d)  $f_4 : z \mapsto 3z - 5 + i$ .

**Exercice 5-18.** Soit  $c \in \mathbb{C}$  tel que  $|c| < 1$ .

- Montrer que  $|z + c| \leq |1 + \bar{c}z|$  si et seulement si  $|z| \leq 1$ .
- On notera  $D = \{z \in \mathbb{C}, |z| \leq 1\}$  le disque unité et  $C = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$  le cercle unité. Montrer que l'application

$$\begin{aligned} f: \quad D &\rightarrow \quad D \\ z &\mapsto \quad \frac{z + c}{1 + \bar{c}z} \end{aligned}$$

est une bijection pour laquelle  $f(C) = C$ .

---

**Exercice 5-101.** Soit  $f: x \mapsto \frac{z^2 - 1}{z(z + 3)}$  définie sur  $\mathbb{C} \setminus \{-3, 0\}$ . Calculer  $f(1 - i)$  et  $f(1 + i)$ .

**Exercice 5-102.** Soit  $z = \frac{3}{\sqrt{3} + i}$ . Calculer  $z^4$ .

**Exercice 5-103.**

- Calculer  $\cos^2(x) \sin^3(x)$  en fonction de  $\sin(x)$ .
- Linéariser  $\cos^4(x)$ .

**Exercice 5-104.**

- Donner les solutions complexes de  $z^4 = 1$ .
- Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $z^4 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ .
- Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $z^8 + \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z^4 - \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = 0$

**Exercice 5-105.**

- Déterminer les quatre nombres complexes  $a, b, c$  et  $d$  différents de 1 qui sont solution dans  $\mathbb{C}$  de l'équation  $z^5 = 1$ .
- Montrer que pour tout nombre complexe  $z$ , on a  $1 + z + z^2 + z^3 + z^4 = (z - a)(z - b)(z - c)(z - d)$ .

**Exercice 5-106.** Déterminer l'ensemble des racines  $n$ -ièmes des nombres complexes suivants :

$$\text{a) } z = e^{i\frac{3\pi}{4}} \text{ pour } n = 3, \quad \text{b) } z = e^{i\frac{\pi}{5}} \text{ pour } n = 4, \quad \text{c) } z = -1 \text{ pour } n = 5.$$

**Exercice 5-107.** Sachant qu'elle admet une racine réelle, résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation suivante :

$$z^3 + (1 - 3i)z^2 - (6 - i)z + 10i = 0$$

**Exercice 5-108.** Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $\frac{1}{2}z^6 + (1 + 3i)z^3 + 8 + 8i = 0$ .

**Exercice 5-109.** On considère l'équation suivante :

$$z^4 - 3z^3 + (2 - i)z^2 + 3z - 3 + i = 0 \tag{E}$$

- Montrer que l'équation (E) admet 2 solutions réelles.
- Résoudre (E) dans  $\mathbb{C}$

**Exercice 5-110.** On considère la fonction  $f$  suivante :

$$\begin{aligned} f: \quad \mathbb{C} &\rightarrow \quad \mathbb{C} \\ z &\mapsto \quad z(1 - z) \end{aligned}$$

- Déterminer les points fixes de  $f$ , c'est à dire résoudre  $f(z) = z$ .
- Montrer que si  $\left|z - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{2}$ , alors  $\left|f(z) - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{2}$ .

Indication : on pourra remarquer que  $z(1 - z) = \left(z - \frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{2} - z\right) + \frac{1}{4}$ .