

Correction Feuille 6 : Suites réelles

Exercice 6-1

$$1. u_n = \frac{n+2}{2n-1} = \frac{n(1+\frac{2}{n})}{n(2-\frac{1}{n})} = \frac{1+\frac{2}{n}}{2-\frac{1}{n}}.$$

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2}{n}\right) = 1$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(2 - \frac{1}{n}\right) = 2$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{1}{2}$.

$$2. u_n = \frac{3n^2 - 2n + 3}{n^3 - 1} = \frac{n^2(3 - \frac{2}{n} + \frac{3}{n^2})}{n^3(1 - \frac{1}{n^3})} = \frac{1}{n} \cdot \frac{3 - \frac{2}{n} + \frac{3}{n^2}}{1 - \frac{1}{n^3}}.$$

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3 - \frac{2}{n} + \frac{3}{n^2}}{1 - \frac{1}{n^3}} = 3$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

$$3. u_n = \frac{3n^2 - 5}{n+4} = \frac{n^2(3 - \frac{5}{n^2})}{n(1 + \frac{4}{n})} = n \cdot \frac{3 - \frac{5}{n^2}}{1 + \frac{4}{n}}.$$

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3 - \frac{5}{n^2}}{1 + \frac{4}{n}} = 3$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

$$4. u_n = \frac{\sqrt{n+2}}{\sqrt{n-1}} = \frac{\sqrt{n(1+\frac{2}{n})}}{\sqrt{n(1-\frac{1}{n})}} = \frac{\sqrt{n}\sqrt{1+\frac{2}{n}}}{\sqrt{n}\sqrt{1-\frac{1}{n}}} = \frac{\sqrt{1+\frac{2}{n}}}{\sqrt{1-\frac{1}{n}}}.$$

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{1}{1} = 1$.

$$5. u_n = \frac{\sqrt{n+5} + n}{\sqrt{n^2+1}} = \frac{n\left(1 + \frac{\sqrt{n+5}}{n}\right)}{\sqrt{n^2\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)}} = \frac{n\left(1 + \sqrt{\frac{n+5}{n^2}}\right)}{\sqrt{n^2}\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}}}.$$

$$n = \sqrt{n^2} \text{ car } n \text{ est positif, donc } u_n = \frac{n\left(1 + \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{5}{n^2}}\right)}{n\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}}} = \frac{1 + \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{5}{n^2}}}{\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}}}.$$

On en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{1+0}{1} = 1$.

$$6. u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{(n+1) - n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}.$$

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

7. Par l'absurde, supposons que la suite $(\sin(n))_{n \in \mathbb{N}}$ admet une limite ℓ_1 . On a la formule de trigonométrie suivante $\sin(n+1) = \sin(n)\cos(1) + \cos(n)\sin(1)$.

Donc $\cos(n) = \frac{\sin(n+1) - \sin(n)\cos(1)}{\sin(1)}$ car $\sin(1) \neq 0$.

En particulier, la suite $(\cos(n))_n$ converge vers $\ell_2 := \frac{\ell_1 - \ell_1 \cos 1}{\sin(1)}$. On en déduit que la suite $(e^{in})_n$ converge vers $\lambda := \ell_2 + i\ell_1$.

Or $e^{i(n+1)} = e^{in}e^i$ et quand on prend la limite on a $\lambda = \lambda e^i$. Donc $\lambda = 0$.

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{in} = 0$. Par suite, $\lim_{n \rightarrow +\infty} |e^{in}| = 0$. C'est absurde car $|e^{in}| = 1$.

En conclusion $(\sin(n))_n$ n'a pas de limite.

$$8. \text{ On a } -1 \leq \sin(n) \leq 1, \text{ donc } \frac{-1}{\sqrt{n}} \leq \frac{\sin(n)}{\sqrt{n}} \leq \frac{+1}{\sqrt{n}}.$$

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-1}{\sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{+1}{\sqrt{n}} = 0$. Par le théorème des gendarmes, on en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin(n)}{\sqrt{n}} = 0$.

9. On a $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \exp\left(n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right)$.

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1$. On a posé $h = \frac{1}{n}$.

Par suite, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = e^1 = e$.

10. $u_n = \frac{n - (-1)^n}{2n + (-1)^n} = \frac{n(1 - \frac{(-1)^n}{n})}{n(2 + \frac{(-1)^n}{n})} = \frac{1 - \frac{(-1)^n}{n}}{2 + \frac{(-1)^n}{n}}$.

$\left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \frac{1}{n}$. Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = 0$, par suite $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$.

Ainsi $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{1}{2}$.

11. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{2n} = 1$ et $u_{2n+1} = -1$, donc la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas.

12. $u_n = \frac{3^n - 2^n}{2^n - 3^n} = (-1) \frac{3^n - 2^n}{3^n - 2^n} = -1$. Donc $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est la suite constante égale à -1 . Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -1$.

13. $u_n = \frac{2^n}{n^{100}} = \frac{\exp(n \ln(2))}{\exp(100 \ln(n))} = \exp(n \ln(2) - 100 \ln(n)) = \exp\left(n \left(\ln(2) - 100 \frac{\ln(n)}{n}\right)\right)$. Or on sait que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(n)}{n} = 0$. Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(2) - 100 \frac{\ln(n)}{n} = \ln(2) > 0$. Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

14. $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \cos 0 = 1$.

15. On a $|u_n| \leq \frac{1}{n}$. Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n| = 0$. Par suite $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

16. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{4n} = \cos(2n\pi) = 1$ et $u_{4n+1} = \cos\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 0$. Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{4n} = 1$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{4n} = 0 \neq \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{4n}$. Ainsi u_n n'a pas de limite.

Exercice 6-2. $u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{2n}$.

1. Montrons que la suite (u_n) est croissante :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \left(\frac{1}{(n+1)+1} + \frac{1}{(n+1)+2} + \dots + \frac{1}{2(n+1)}\right) - \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}\right) \\ &= \left(\frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{2n+2}\right) - \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}\right) \\ &= \left(\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2}\right) - \left(\frac{1}{n+1}\right) \\ &= \frac{2(n+1) + 2n+1 - 2(2n+1)}{(2n+1)2(n+1)} \\ &= \frac{2n+2 + 2n+1 - 4n-2}{(2n+1)2(n+1)} \\ &= \frac{1}{(2n+1)2(n+1)} \end{aligned}$$

Donc $u_{n+1} - u_n > 0$, par suite $u_{n+1} > u_n$. On en déduit que la suite (u_n) est croissante.

2. Dans la définition de (u_n) , on remarque que le terme le plus grand est $\frac{1}{n+1}$ et le terme le plus petit est $\frac{1}{2n}$. De plus, u_n est défini comme la somme de n termes. On en déduit l'encadrement

$$\begin{aligned} n \left(\frac{1}{2n} \right) &< u_n < n \left(\frac{1}{n+1} \right) \\ \frac{1}{2} &< u_n < \frac{n}{n+1} = 1 - \frac{1}{n} < 1 \end{aligned}$$

Donc $\frac{1}{2} < u_n < 1$. Comme la suite est croissante et majorée (par 1), elle converge par le théorème de la convergence monotone vers une limite ℓ , et cette limite vérifie $\frac{1}{2} \leq \ell \leq 1$.

3. Soit la suite $v_n := \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ définie pour $n \in \mathbb{N}^*$. Par l'absurde, supposons que (v_n) converge vers μ . On a $v_{2n} = v_n + u_n$. En prenant la limite on obtient $\mu = \mu + \ell$. D'où $\ell = 0$. C'est impossible vu l'encadrement de ℓ dans la question 2. On en déduit que (v_n) n'a pas de limite finie. Comme elle est croissante alors $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = +\infty$.

Exercice 6-3. $u_n = \frac{1}{2}u_{n-1} + 3$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

1. $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite arithmético-géométrique car elle est de la forme $u_n = au_{n-1} + b$ avec b et c constantes.

2. $\alpha = \frac{1}{2}\alpha + 3 \iff \frac{1}{2}\alpha = 3 \iff \alpha = 6$.

3. On retranche membre à membre les égalités $u_n = \frac{1}{2}u_{n-1} + 3$ et $\alpha = \frac{1}{2}\alpha + 3$. On obtient $u_n - \alpha = \frac{1}{2}(u_{n-1} - \alpha)$. Ainsi $v_n = \frac{1}{2}v_{n-1}$.

4. $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 6 = 8 - 6 = 2$.

Par suite $v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n v_0 = 2 \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2^{n-1}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4. $v_n = u_n - \alpha = u_n - 6$. Donc $u_n = v_n + 6 = \frac{1}{2^{n-1}} + 6$.

On en déduit $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 6$.

Exercice 6-4. , $u_0 = 1$, $u_{n+1} = \frac{u_n + 8}{2u_n + 1}$, $v_n = \frac{u_n - 2}{u_n + 2}$.

1.

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \frac{u_{n+1} - 2}{u_{n+1} + 2} = \left(\frac{u_n + 8}{2u_n + 1} - 2 \right) \times \frac{1}{\frac{u_n + 8}{2u_n + 1} + 2} \\ &= \frac{u_n + 8 - 2(2u_n + 1)}{u_n + 8 + 2(2u_n + 1)} \\ &= \frac{-3u_n + 6}{5u_n + 10} \\ &= \frac{-3}{5} \times \frac{u_n - 2}{u_n + 2} \\ &= -\frac{3}{5}v_n \end{aligned}$$

Donc $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $-\frac{3}{5}$ et de premier terme $v_0 = \frac{u_0 - 2}{u_0 + 2} = -\frac{1}{3}$.

2. On déduit que $v_n = \left(-\frac{3}{5}\right)^n v_0 = -\frac{1}{3} \left(-\frac{3}{5}\right)^n$.

3. Comme $v_n = \frac{u_n - 2}{u_n + 2}$ alors $v_n(u_n + 2) = u_n - 2$ donc $u_n(v_n - 1) = -2(v_n + 1)$ et ainsi $u_n = \frac{-2(v_n + 1)}{v_n - 1}$. On en déduit $u_n = -\frac{2[-\frac{1}{3}(-\frac{3}{5})^n + 1]}{-\frac{1}{3}(-\frac{3}{5})^n - 1} = 2 \cdot \frac{3 - (-\frac{3}{5})^n}{3 + (-\frac{3}{5})^n}$.

4. Comme $-1 < -\frac{3}{5} < 1$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-\frac{3}{5}\right)^n = 0$. On en déduit $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2$.

Exercice 6-5. $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \sqrt{2u_n - 1} \forall n \in \mathbb{N}$.

1. Par récurrence, posons P_n : " $u_n > 1$ ".

Initialisation : Pour $n = 0$ on a bien $u_0 = 2 > 1$. Donc P_0 est vraie.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons P_n vraie, montrons P_{n+1} est vraie. On a $u_{n+1} = \sqrt{2u_n - 1}$ donc par hypothèse de récurrence $u_{n+1} > \sqrt{2 \times 1 - 1} = 1$. Ainsi $u_{n+1} > 1$. Donc P_{n+1} est vraie. Ainsi P_n est héréditaire.

Conclusion : Comme P_0 est vraie et que P_n est héréditaire alors P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Donc $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est minorée par 1.

2. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \sqrt{2u_n - 1} - u_n = \frac{(\sqrt{2u_n - 1} - u_n)(\sqrt{2u_n + 1} + u_n)}{\sqrt{2u_n + 1} + u_n} \\ &= \frac{2u_n - 1 - u_n^2}{\sqrt{2u_n + 1} + u_n} \\ &= -\frac{(u_n - 1)^2}{\sqrt{2u_n + 1} + u_n} < 0 \end{aligned}$$

On en déduit que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

3. Comme la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par 1 alors elle converge par le théorème de la convergence monotone. On note ℓ sa limite. On a ℓ qui vérifie la relation de récurrence d'où $\ell = \sqrt{2\ell - 1}$.

$$\ell = \sqrt{2\ell - 1} \iff \ell^2 = 2\ell - 1 \iff (\ell - 1)^2 = 0 \iff \ell = 1.$$

Exercice 6-6. $u_0 = 1$ et $u_n = \sqrt{1 + u_{n-1}}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Par récurrence posons P_n : " $0 \leq u_n \leq 2$ ".

Initialisation : Pour $n = 0$ on a bien $u_0 = 1 \in [0, 2]$. Donc P_0 est vraie.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons P_n vraie, montrons que P_{n+1} est vraie.

On a $u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n}$. Comme $u_n \geq 0$ alors $1 + u_n \geq 0$. Donc u_{n+1} existe, $u_{n+1} \geq 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n} \leq \sqrt{1 + 2} = \sqrt{3} < 2$. Donc P_{n+1} est vraie et ainsi P_n est héréditaire.

Conclusion : Comme P_0 est vraie et que P_n est héréditaire alors P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. Soit R_n : " $u_n < u_{n+1}$ ". Montrons que R_n est vraie par récurrence.

R_0 : " $u_0 < u_1$ ". Donc R_0 : " $1 < \sqrt{2}$ ". Ainsi R_0 est vraie. Supposons R_n vraie pour $n \in \mathbb{N}$ fixé.

Montrons que R_{n+1} : " $u_{n+1} < u_{n+2}$ " est vraie.

Comme R_n est vraie alors $u_n < u_{n+1}$, donc $1 + u_n < 1 + u_{n+1}$ et par suite $\sqrt{1 + u_n} < \sqrt{1 + u_{n+1}}$.

Ainsi $u_{n+1} < u_{n+2}$. Donc R_{n+1} est vraie.

En conclusion R_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.

3. Comme $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et majorée (par 2) alors par le théorème de convergence monotone, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge. On note ℓ sa limite. La limite vérifie la relation de récurrence d'où $\ell = \sqrt{1 + \ell}$.

Comme $u_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ alors $\ell \geq 0$.

$$\text{On a } \ell^2 - \ell - 1 = 0. \quad \Delta = 5.$$

$\ell_1 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} < 0$. Donc ℓ_1 ne convient pas.

$\ell_2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} > 0$. Ainsi $\ell = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

Exercice 6-7.

1. $u_{n+1} = \frac{1}{6}u_n + 5$. $u_0 = 3$.

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite arithmético-géométrique. On utilise la méthode de l'exercice 6-3.

Cherchons $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha = \frac{1}{6}\alpha + 5$.

$$\alpha = \frac{1}{6}\alpha + 5 \iff \frac{5}{6}\alpha = 5 \iff \alpha = 6.$$

Posons $v_n := u_n - \alpha$.

On obtient $v_{n+1} = \frac{1}{6}v_n$.

$(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{6}$ et de premier terme $v_0 = u_0 - \alpha = 3 - 6 = -3$.

$$\text{Donc } v_n := \left(\frac{1}{6}\right)^n v_0 = -3 \left(\frac{1}{6}\right)^n = \frac{-3}{6^n}.$$

On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$.

$v_n = u_n - \alpha$. Donc $u_n = v_n + \alpha = v_n + 6$.

Ainsi $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 6$.

Pour les questions 2, 3 et 4 nous ne donnons que des indications qui guident l'étude de chaque suite :

2. $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite arithmético-géométrique. Voir méthode exercice 6-3.

On trouve que u_n n'a pas de limite.

3. Montrez que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par 0.

En déduire que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et que sa limite est $\ell = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

4. Montrez que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et majorée par 4.

En déduire que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et que sa limite est 4.

5. $u_{n+1} = u_n^2 + \frac{2}{9}$, $u_0 = 0$.

a) Montrons par récurrence que $0 \leq u_n \leq \frac{1}{3}$ pour tout $n \geq 0$.

Soit $P(n)$: " $0 \leq u_n \leq \frac{1}{3}$ ".

$P(0)$: " $0 \leq u_0 \leq \frac{1}{3}$ ".

$P(0)$ est vrai car $u_0 = 0$.

Supposons que $P(n)$ est vraie pour un entier n donné et montrons que $P(n+1)$ est vraie.

$P(n+1)$: " $0 \leq u_{n+1} \leq \frac{1}{3}$ ".

$u_{n+1} = u_n^2 + \frac{2}{9}$ donc $u_{n+1} \geq 0$.

$P(n)$ vraie implique $0 \leq u_n \leq \frac{1}{3}$. Donc $u_n^2 \leq \left(\frac{1}{3}\right)^2$ c'est à dire $u_n^2 \leq \frac{1}{9}$. Donc $u_n^2 + \frac{2}{9} \leq \frac{1}{9} + \frac{2}{9} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$.

Comme $u_{n+1} = u_n^2 + \frac{2}{9}$ alors $u_{n+1} \leq \frac{1}{3}$. Donc $P(n+1)$ est vraie.

En conclusion $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Donc $0 \leq u_n \leq \frac{1}{3}$ pour tout $n \geq 0$.

b) On va montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante par récurrence.

Soit $R(n) : "u_n \leq u_{n+1}"$.

$R(0) : "u_0 \leq u_1"$.

$R(0) : "0 \leq \frac{2}{9}"$. Donc $R(0)$ est vraie.

Supposons que $R(n)$ est vraie pour un entier n donné et montrons que $R(n+1)$ est vraie.

$R(n+1) : "u_{n+1} \leq u_{n+2}"$.

$R(n)$ vraie $\implies u_n \leq u_{n+1} \implies u_n^2 \leq u_{n+1}^2 \implies u_n^2 + \frac{2}{9} \leq u_{n+1}^2 + \frac{2}{9} \implies u_{n+1} \leq u_{n+2}$.

Donc $R(n+1)$ est vraie.

En conclusion $R(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donc $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.

c) D'après ce qui précède $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante et majorée par $\frac{1}{3}$. Donc $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

Soit ℓ sa limite, $\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

$u_{n+1} = u_n^2 + \frac{2}{9}$. En passant aux limites on obtient : $\ell = \ell^2 + \frac{2}{9}$.

Comme $0 \leq u_n \leq \frac{1}{3}$ pour tout $n \geq 0$, alors $\ell \in \left[0, \frac{1}{3}\right]$.

$$\ell^2 - \ell + \frac{2}{9} = 0.$$

$$\Delta = 1 - \frac{8}{9} = \frac{1}{9}.$$

$$\sqrt{\Delta} = \frac{1}{3}.$$

$$\ell_1 = \frac{1 - \frac{1}{3}}{2} = \frac{1}{3} \in \left[0, \frac{1}{3}\right].$$

$$\ell_2 = \frac{1 + \frac{1}{3}}{2} = \frac{2}{3} \notin \left[0, \frac{1}{3}\right]. \text{ Donc } \ell_2 \text{ ne convient pas.}$$

$$\text{Donc } \ell = \frac{1}{3}.$$

6. $u_0 = 2, u_1 = \frac{1}{3}, u_2 = -\frac{1}{2}, u_3 = -3, u_4 = 2 = u_0$. Donc les termes vont se répéter. Ainsi la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est périodique. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{4n} = 2.$$

$$u_{4n+1} = \frac{1}{3}.$$

$$u_{4n+2} = -\frac{1}{2}.$$

$$u_{4n+3} = -3.$$

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas convergente.

Exercice 6-8. $\frac{u_n}{1+u_n} = \frac{u_n + 1 - 1}{1+u_n} = 1 - \frac{1}{1+u_n}$.

Donc $\frac{1}{1+u_n} = 1 - \frac{u_n}{1+u_n}$. Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{1+u_n} = 0$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{1+u_n} = 1$.

Par suite $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1+u_n) = 1$, d'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

Exercice 6-9. La suite $(u_{2n})_n$ converge vers $\ell \in \mathbb{R}$.
 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, par hypothèse de croissance, on a

$$u_{2n} \leq u_{2n+1} \leq u_{2n+2}.$$

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n+2} = \ell$. D'après le théorème des gendarmes, on obtient $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n+1} = \ell$.
 En résumé on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n+1} = \ell$. Donc la suite $(u_n)_n$ est convergente vers ℓ .

Exercice 6-10. $u_0 \in [0, 1]$ et $u_n = \frac{3 - u_{n-1}^2}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

1. $f(x) = \frac{3 - x^2}{2}$. Notons que $u_{n+1} = f(u_n)$.

1.(a). On a $f'(x) = -x$ donc $f'(x) \leq 0$ pour tout $x \in [0, +\infty[$. Ainsi f est décroissante sur $[0, +\infty[$.

1.(b). Soit $x \in [0, \sqrt{3}]$. Alors $f(x) = \frac{3 - x^2}{2} \geq \frac{3 - (\sqrt{3})^2}{2} = 0$ et $f(x) = \frac{3 - x^2}{2} \leq \frac{3}{2} \leq \sqrt{3}$. Ainsi $f(x) \in [0, \sqrt{3}]$. D'où l'intervalle $[0, \sqrt{3}]$ est stable par f .

On en déduit que $0 \leq u_n \leq \sqrt{3}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1.(c). $f(\ell) = \ell \iff \frac{3 - \ell^2}{2} = \ell \iff 3 - \ell^2 = 2\ell \iff \ell^2 + 2\ell - 3 = 0$. Il y a 2 solutions : 1 et -3 mais comme $\ell \in [0, +\infty[$ alors $\ell = 1$.

2. On montre par récurrence que la suite $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.

Soit $P(n) : "u_{2n} \leq u_{2n+2}"$.

$P(0) : "u_0 \leq u_2"$.

$$u_2 = \frac{3 - u_1^2}{2} = \frac{3 - (\frac{3 - u_0^2}{2})^2}{2}. \text{ Posons } x := u_0. \text{ On a } u_2 = \frac{3 - (\frac{3 - x^2}{2})^2}{2} = \frac{-x^4 + 6x^2 + 3}{8}.$$

$$P(0) \iff x \leq \frac{-x^4 + 6x^2 + 3}{8} \iff x^4 - 6x^2 + 8x - 3 \leq 0.$$

Posons $g(x) := x^4 - 6x^2 + 8x - 3$.

$$g'(x) := 4x^3 - 12x + 8 = 4(x^3 - 3x + 2) = 4(x - 1)(x^2 + x - 2) = 4(x - 1)^2(x + 2).$$

Comme $x \in [0, 1]$ alors $g'(x) \geq 0$ donc g est croissante, d'où $g(x) \leq g(1) = 0$. Ainsi $P(0)$ est vraie.

Supposons $P(n)$ vraie pour n fixé. Etudions $P(n + 1)$.

$P(n + 1) : "u_{2n+2} \leq u_{2n+4}"$.

Comme $P(n)$ est vraie alors $u_{2n} \leq u_{2n+2}$. On sait que f est décroissante sur $[0, +\infty[$. Donc $f(u_{2n}) \geq f(u_{2n+2})$, d'où $u_{2n+1} \leq u_{2n+3}$. On applique f de nouveau, on obtient $f(u_{2n+1}) \geq f(u_{2n+3})$. Ainsi $u_{2n+2} \geq u_{2n+4}$. Par suite $P(n + 1)$ est vraie.

En conclusion $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donc la suite $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{2n} \leq u_{2n+2}$. Comme f est décroissante alors $f(u_{2n}) \geq f(u_{2n+2})$. Donc $u_{2n+1} \geq u_{2n+3}$.

Ainsi la suite $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

3. Par le théorème de convergence monotone comme $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante majorée (par $\sqrt{3}$) et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante minorée (par 0) alors ces deux suites convergent. On note ℓ_1 et ℓ_2 leurs limites respectives : $\ell_1 = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n}$ et $\ell_2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n+1}$.

Comme $u_{2n+1} = \frac{3 - u_{2n}^2}{2}$ et $u_{2n+2} = \frac{3 - u_{2n+1}^2}{2}$, alors par passage aux limites, on a :

$$\ell_2 = \frac{3 - \ell_1^2}{2} \text{ et } \ell_1 = \frac{3 - \ell_2^2}{2}.$$

$$\text{Donc } 2\ell_2 = 3 - \ell_1^2 \text{ et } 2\ell_1 = 3 - \ell_2^2.$$

$$\text{Donc } 2\ell_2 - 2\ell_1 = (3 - \ell_1^2) - (3 - \ell_2^2) = \ell_2^2 - \ell_1^2 = (\ell_2 - \ell_1)(\ell_2 + \ell_1).$$

C'est à dire $2(\ell_2 - \ell_1) - (\ell_2 - \ell_1)(\ell_2 + \ell_1) = 0$.

On a donc $(\ell_2 - \ell_1)(2 - (\ell_2 + \ell_1)) = 0$. Donc $\ell_1 = \ell_2$ ou $\ell_2 + \ell_1 = 2$.

Si $\ell_1 = \ell_2$ alors $\ell_1 = \frac{3 - \ell_1^2}{2}$, donc $2\ell_1 = 3 - \ell_1^2$. Par suite $\ell_1^2 + 2\ell_1 - 3 = 0$, les solutions sont 1 et -3 .

Comme $1 \in [0, \sqrt{3}]$ et $-3 \notin [0, \sqrt{3}]$ alors $\ell_1 = 1$ et $\ell_2 = 1$.

Si $\ell_2 + \ell_1 = 2$ alors $\ell_2 = 2 - \ell_1$. Comme $\ell_2 = \frac{3 - \ell_1^2}{2}$ alors $2\ell_2 = 3 - \ell_1^2$. Donc $2(2 - \ell_1) = 3 - \ell_1^2$. Ce

qui donne $4 - 2\ell_1 = 3 - \ell_1^2$.

$$\ell_1^2 - 2\ell_1 + 1 = 0$$

$(\ell_1 - 1)^2 = 0$, d'où $\ell_1 = 1$, par suite $\ell_2 = 1$.

Dans les deux cas $\ell_1 = \ell_2 = 1$. On en déduit que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 1.

Exercice 6-11.

1. D'après un théorème du cours, $(w_n)_n$ converge aussi.

2. Si $(w_n)_n$ ne converge pas, alors au moins une entre $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ ne converge pas (il s'agit juste de la contraposée de l'implication précédente).

Rappel :

(i) La contraposée de $P \implies Q$ est $(\text{non } Q) \implies (\text{non } P)$.

(ii) $P \implies Q$ est équivalente à sa contraposée.

3. Il suffit de prendre $u_n = n$ et $v_n = -n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 6-12.

1.

$$w_n = u_n^2 + 2u_n \frac{1}{2}v_n + \frac{1}{4}v_n^2 + \frac{3}{4}v_n^2 = \left(u_n + \frac{1}{2}v_n\right)^2 + \frac{3}{4}v_n^2.$$

2. Du point précédent, on déduit que $w_n \geq 0$.

On a

$$0 \leq \left(u_n + \frac{1}{2}v_n\right)^2 \leq w_n \quad (i)$$

et

$$0 \leq \frac{3}{4}v_n^2 \leq w_n$$

c'est à dire

$$0 \leq v_n^2 \leq \frac{4}{3}w_n \quad (ii)$$

On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 0$. Le théorème des gendarmes appliqué à (ii) donne $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n^2 = 0$ et par suite $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$.

De même le théorème des gendarmes appliqué à (i) donne $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(u_n + \frac{1}{2}v_n\right)^2 = 0$ et par suite $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(u_n + \frac{1}{2}v_n\right) = 0$. Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$ et que $u_n = \left(u_n + \frac{1}{2}v_n\right) - \frac{1}{2}v_n$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

Exercice 6-13.

1.(a). Par définition de limite, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N_\varepsilon$, on a

$$10 - \varepsilon \leq \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 10 + \varepsilon.$$

Alors, il suffit de prendre $\varepsilon = 5$ et $N = N_\varepsilon$, et utiliser le fait que u_n est positif.

2ème méthode :

Comme $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 10$, alors à partir d'un certain rang N , $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 5$, c'est à dire :

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 5.$$

Comme $u_n > 0$, alors :

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_{n+1} \geq 5u_n.$$

1.(b). Par récurrence sur $n \geq N$.

Soit $P(n) : "u_n \geq 5^{n-N}u_N"$.

$P(N) : "u_N \geq 5^0u_N"$. Donc $P(N)$ est vraie.

On suppose $P(n)$ vraie pour n fixé.

$P(n+1) : "u_{n+1} \geq 5^{n+1-N}u_N"$.

On a $u_{n+1} \geq 5u_n \geq 5 \cdot 5^{n-N}u_N = 5^{n+1-N}u_N$. Donc $P(n+1)$ est vraie.

En conclusion $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq N$.

Ainsi pour tout $n \geq N$, $u_n \geq 5^{n-N}u_N$.

2ème méthode :

Pour tout $n \geq N+1$, on a :

$$u_{N+1} \geq 5u_N.$$

$$u_{N+2} \geq 5u_{N+1}.$$

...

...

...

...

$$u_n \geq 5u_{n-1}.$$

Multiplions ces inégalités membre à membre (en simplifiant mentalement), nous obtenons une nouvelle inégalité :

$$u_n \geq 5^p u_N$$

où p est le nombre de ces termes : $u_{N+1}, u_{N+2}, \dots, u_n$. On a $p = n - (N+1) + 1 = n - N$.

$$\text{Donc } u_n \geq 5^{n-N}u_N.$$

Or pour $n = N$, $u_n = u_N = 5^{n-N}u_N$.

Ainsi pour tout $n \geq N$, $u_n \geq 5^{n-N}u_N$.

1.(c). Il s'agit d'une simple conséquence du point précédent, avec le fait que $u_N > 0$ par hypothèse.

En effet : Comme N est fixé alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} 5^{n-N} = +\infty$. Comme $u_N > 0$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} 5^{n-N}u_N = +\infty$.

Or $u_n \geq 5^{n-N}u_N$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

2.(a). On applique encore une fois la définition de limite (comme on a fait au point 1.a. ci-dessus), avec $\varepsilon = \frac{1}{2}$.

2ème méthode :

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 0$, alors à partir d'un certain rang N , $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{1}{2}$, c'est à dire :

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{1}{2}.$$

Comme $u_n > 0$, alors :

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_{n+1} \leq \frac{1}{2}u_n.$$

2.(b). En raisonnant comme avant (par exemple par récurrence) , on prouve que $u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-N} u_N$.

Comme N est fixé et que $-1 < \frac{1}{2} < 1$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-N} = 0$.

Comme $u_N > 0$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-N} u_N = 0$.

Or $0 \leq u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-N} u_N$, donc par le théorème des gendarmes, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

Exercice 6-14.

1. On remarque que $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{(n+1)^2}$. Comme $\frac{1}{(n+1)^2} > 0$ alors $(u_n)_n$ est croissante. En utilisant cette propriété, on peut écrire

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= u_{n+1} + \frac{1}{n+1} - u_n - \frac{1}{n} = u_n + \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n+1} - u_n - \frac{1}{n} \\ &= \frac{1}{n(n+1)^2} \left(n + n(n+1) - (n+1)^2 \right) = -\frac{2}{n(n+1)^2} < 0. \end{aligned}$$

Donc $(v_n)_n$ est décroissante.

2. $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - u_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$. Comme $(u_n)_n$ est croissante et $(v_n)_n$ est décroissante, alors $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont des suites adjacentes, par suite les deux suites sont convergentes vers la même limite.

Exercice 6-101. On commence par remarquer que, par hypothèse de croissance de $(u_n)_n$, on a $\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \sup_{n \in \mathbb{N}^*} u_n$.

$$v_n = \frac{u_1 + u_2 + \dots + u_n}{n} \leq \frac{u_n + u_n + \dots + u_n}{n} = \frac{nu_n}{n} = u_n. \text{ Ainsi } v_n \leq u_n \leq \ell \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

1. En utilisant la définition de v_n , on trouve tout de suite que

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} \right) \sum_{j=1}^n u_j + \frac{u_{n+1}}{n+1} = -\frac{1}{n(n+1)} \sum_{j=1}^n u_j + \frac{u_{n+1}}{n+1} \\ &= -\frac{v_n}{n+1} + \frac{u_{n+1}}{n+1} \geq \frac{1}{n+1} (-u_n + u_{n+1}) \geq 0, \end{aligned}$$

On a utilisé aussi la propriété $v_n \leq u_n$ pour écrire la première inégalité.

On en déduit que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante.

2. On a déjà montré que $v_n \leq \ell$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, donc $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est majorée. Comme elle est croissante, alors elle converge.

3. On sait que $v_n \leq \ell$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Comme $\ell' = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$ alors $\ell' \leq \ell$. (i)

4.

$$v_{2n} = \frac{1}{2n} \sum_{j=1}^n u_j + \frac{1}{2n} \sum_{j=n+1}^{2n} u_j = \frac{1}{2} v_n + \frac{1}{2n} \sum_{j=n+1}^{2n} u_j \geq \frac{1}{2} v_n + \frac{1}{2n} \cdot nu_n = \frac{v_n}{2} + \frac{u_n}{2}.$$

Ainsi $v_{2n} \geq \frac{u_n + v_n}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

5. En passant à la limite à droite et à gauche de l'inégalité qu'on vient de montrer, on trouve $\ell' \geq \frac{\ell + \ell'}{2}$, par suite $\ell' \geq \ell$. (ii).

(i) et (ii) impliquent $\ell = \ell'$.

Exercice 6-102.

1. $\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \frac{k+1-k}{k(k+1)} = \frac{1}{k(k+1)}$.

2. $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} = \frac{1}{1} - \frac{1}{n+1}$.

$$u_n = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Cela implique que $(u_n)_n$ est convergente de limite égale à 1.

Exercice 6-103. $u_0 \in]1, 2[$ et $u_{n+1} = \frac{u_n^2}{4} + \frac{3}{4}$.

1. et 2. Par récurrence, l'initialisation étant vérifiée par hypothèse. Prouvons alors l'hérédité : supposons que $1 < u_n \leq 2$. Cela implique tout de suite que $u_{n+1} > \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$, et que $u_{n+1} \leq \frac{1}{4} \cdot 4 + \frac{3}{4} \leq 2$. La propriété est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. Par récurrence on montre que $(u_n)_n$ est décroissante, donc monotone.

Soit $P(n) : "u_{n+1} \leq u_n"$.

$P(0) : "u_1 \leq u_0"$.

$$P(0) \iff u_1 - u_0 \leq 0 \iff \frac{1}{4}u_0^2 + \frac{3}{4} - u_0 \leq 0 \iff u_0^2 - 4u_0 + 3 \leq 0 \iff (u_0 - 1)(u_0 - 3) \leq 0.$$

Comme $u_0 \in]1, 2[$ alors la proposition " $(u_0 - 1)(u_0 - 3) \leq 0$ " est vraie. Par suite $P(0)$ est vraie.

Supposons $P(n)$ vraie pour n fixé.

$P(n+1) : "u_{n+2} \leq u_{n+1}"$.

$$u_{n+2} = \frac{u_{n+1}^2}{4} + \frac{3}{4} \leq \frac{u_n^2}{4} + \frac{3}{4} = u_{n+1}.$$

Donc $P(n+1)$ est vraie.

En conclusion $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Donc $(u_n)_n$ est décroissante. Comme elle est minorée par 1, alors elle converge. Soit ℓ sa limite.

Comme $1 < u_n \leq 2$ alors $\ell \in [1, 2]$.

4. En passant à la limite dans la formule définissant u_{n+1} , on trouve $\ell = \frac{1}{4}\ell^2 + \frac{3}{4}$ ce qui équivaut à $\ell^2 - 4\ell + 3 = 0$. Les solutions sont 3 et 1. Comme $\ell \in [1, 2]$ alors $\ell = 1$.

Exercice 6-104.

1. $f'(x) = 2(x-1)$, qui est positive sur $[1, +\infty[$. Maintenant, par croissance, il suffit de calculer $f(1) = 1$ et $f(2) = 2$: on a donc que $f(]1, 2[) =]1, 2[$, autrement dit l'intervalle $]1, 2[$ est stable par f .

2. Par récurrence.

Initialisation. $u_0 = \frac{3}{2}$, donc u_0 appartient à l'intervalle $]1, 2[$.

Hérédité. Supposons maintenant que $u_n \in]1, 2[$. On a $u_{n+1} = f(u_n)$, et donc, par stabilité de l'intervalle, on a aussi que $u_{n+1} \in]1, 2[$.

La propriété est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. On étudie $f(x) - x = x^2 - 3x + 2 = (x-2)(x-1)$, qui est donc toujours strictement négative dans $]1, 2[$. On en déduit que $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n < 0$ pour tout n . Par suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement décroissante, donc monotone.

4. La suite $(u_n)_n$ est décroissante et minorée (par 1) donc elle converge. Soit ℓ sa limite. Vu que la suite est décroissante, on a $1 \leq \ell \leq u_0 < 2$. En passant à la limite dans la formule qui définit u_{n+1} , par continuité de f on trouve que ℓ doit être un point fixe de $f : \ell = f(\ell)$.

$$\ell = f(\ell) \iff \ell^2 - 3\ell + 2 = 0 \iff \ell = 1 \text{ ou } \ell = 2. \text{ La seule valeur admissible est } \ell = 1 \text{ car } \ell \leq u_0 = \frac{3}{2}.$$

Exercice 6-105.

1. De la définition de u_{n+1} , on a $u_{n+1} > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donc $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

2. Si la suite converge vers une limite ℓ , alors ℓ doit vérifier $\ell = \frac{1}{6}\ell^2 + \frac{3}{2}$.

$$\text{Ce qui équivaut à } \ell^2 - 6\ell + 9 = (\ell - 3)^2 = 0.$$

Donc $\ell = 3$.

3. Il s'agit d'une simple récurrence.

Initialisation. $u_0 < 3$ est vraie car $u_0 = 0$.

Hérédité. Supposons maintenant que $u_n < 3$ pour n fixé. On a

$$u_{n+1} = \frac{1}{6}u_n^2 + \frac{3}{2} < \frac{1}{6}3^2 + \frac{3}{2} = \frac{3}{2} \cdot 2 = 3.$$

La propriété est alors vraie au rang $n + 1$.

En conclusion $u_n < 3$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4. Soit $f(x) = \frac{1}{6}x^2 + \frac{3}{2}$. On a

$$f(x) - x = \frac{1}{6}(x^2 + 9 - 6x) = \frac{(x-3)^2}{6} \geq 0.$$

Étant donné que $u_{n+1} = f(u_n)$, on voit tout de suite que u_n est croissante. Comme elle est majorée alors elle admet une limite finie ℓ , qui doit vérifier (par le point 3.) $\ell \leq 3$. Par le point 2., on a donc $\ell = 3$.

Exercice 6-106.

1. $u_0 = 1$, $u_1 = 2$, $u_2 = \frac{3}{2}$ et $u_3 = \frac{5}{3}$.

2. C'est une simple récurrence.

$P(n)$: " $1 \leq u_n \leq 2$ ".

$P(0)$: " $1 \leq u_0 \leq 2$ ". Comme $u_0 = 1$ alors $P(0)$ est vraie.

On suppose $P(n)$ vraie pour n fixé.

Étudions $P(n+1)$: " $1 \leq u_{n+1} \leq 2$ ".

$$u_{n+1} = 1 + \frac{1}{u_n}.$$

$1 \leq u_n \leq 2 \implies \frac{1}{2} \leq \frac{1}{u_n} \leq 1 \implies 1 + \frac{1}{2} \leq 1 + \frac{1}{u_n} \leq 1 + 1 \implies \frac{3}{2} \leq u_{n+1} \leq 2$. Donc $P(n+1)$ est vraie.

En conclusion $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $1 \leq u_n \leq 2$.

3. Posons $f(x) := 1 + \frac{1}{x}$. On a $f'(x) := -\frac{1}{x^2} < 0$. Donc f est strictement décroissante. Notons que $u_{n+1} = f(u_n)$.

On montre par récurrence que $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.

Soit $P(n)$: " $u_{2n} < u_{2n+2}$ ".

$P(0)$: " $u_0 < u_2$ ". Comme $u_0 = 1$ et $u_2 = \frac{3}{2}$ alors $P(0)$ est vraie.

Supposons $P(n)$ vraie pour $n \in \mathbb{N}$ fixé.

Montrons que $P(n+1)$: " $u_{2n+2} < u_{2n+4}$ " est vraie.

Comme $P(n)$ est vraie alors $u_{2n} < u_{2n+2}$, donc $f(u_{2n}) > f(u_{2n+1})$ car f décroissante. Par suite $u_{2n+1} > u_{2n+3}$. On a $f(u_{2n+1}) < f(u_{2n+3})$, c'est à dire $u_{2n+2} < u_{2n+4}$. Donc $P(n+1)$ est vraie.

En conclusion $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante. Comme elle est majorée alors elle converge vers une limite ℓ .

$u_{2n+1} = f(u_{2n})$ et $u_{2n+3} = f(u_{2n+2})$. Comme $u_{2n} < u_{2n+2}$ et que f est décroissante alors $u_{2n+1} > u_{2n+3}$. Donc $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante. Comme elle est minorée alors elle converge vers une limite ℓ' .

De la définition de u_{n+1} , on trouve rapidement que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$u_{2n+2} = 1 + \frac{u_{2n}}{1 + u_{2n}} \quad \text{et} \quad u_{2n+3} = 1 + \frac{u_{2n+1}}{1 + u_{2n+1}}. \quad (1)$$

Donc ℓ et ℓ' sont solutions de l'équation (E) : $x = 1 + \frac{x}{1+x}$.

$$(E) \iff x - 1 = \frac{x}{1+x} \iff x^2 - 1 = x \iff x^2 - x - 1 = 0.$$

$\Delta = 5$. Les racines de l'équation sont $x_1 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ et $x_2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$. Or de 2) découle : $\ell, \ell' \in [1, 2]$

$$\text{donc } \ell = \ell' = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_{2n} - u_{2n+1}) = \ell - \ell' = 0.$$

On a $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante, $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_{2n} - u_{2n+1}) = 0$. Donc les deux suites $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ sont adjacentes.

4. $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n+1} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ implique $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

Exercice 6-107.

1. On pose $u_n := \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}$. On a :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} - \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} \right) = \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n} = \frac{-2}{n(n+2)} < 0.$$

Donc $(u_n)_n$ est décroissante.

2. On pose $u_n := n - 2^n$. On a :

$$u_{n+1} - u_n = n + 1 - 2^{n+1} - (n - 2^n) = 1 - 2^n \times 2 + 2^n = 1 + 2^n(-2 + 1) = 1 - 2^n \leq 1 - 2^0 = 0.$$

Donc $(u_n)_n$ est décroissante.

3. On pose $u_n := \frac{e^n}{n!}$. On a :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{e^{n+1}}{(n+1)!} \times \frac{n!}{e^n} = \frac{e^{n+1-n}}{n+1} = \frac{e}{n+1} < 1 \text{ si } n \geq 3.$$

Donc la suite $(u_n)_n$ est décroissante à partir du rang $N = 3$.

4. On pose $u_n := (n+1)(n+2) \dots (n+n)$. On a :

$$\begin{aligned} \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{(n+1+1)(n+1+2) \dots (n+1+n-1)(n+1+n)(n+1+n+1)}{(n+1)(n+2) \dots (n+n)} \\ &= \frac{(n+1+n)(n+1+n+1)}{n+1} = \frac{(2n+1)(2n+2)}{n+1} \geq 1. \end{aligned}$$

Donc $(u_n)_n$ est croissante.

5. On pose $u_n := \frac{n-1}{n+3}$. On a :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{n}{n+4} - \frac{n-1}{n+3} = \frac{n(n+3) - (n-1)(n+4)}{(n+4)(n+3)} = \frac{4}{(n+4)(n+3)} > 0.$$

Donc $(u_n)_n$ est croissante.

6. On pose $u_n := n - sh(n)$. On a :

$$u_{n+1} - u_n = n + 1 - sh(n+1) - (n - sh(n)) = 1 - sh(n+1) + sh(n).$$

Or $sh(n+1) = sh(n)ch(1) + sh(1)ch(n) \geq sh(n) + sh(1) \geq sh(n) + 1$. Ainsi $u_{n+1} - u_n \leq 0$.

Donc $(u_n)_n$ est décroissante.

Exercice 6-108.

1. On commence par remarquer la suite d'inégalités suivantes :

$$1 \leq u_n \leq v_n \quad \forall n \in \mathbb{N}^* .$$

On a $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{(n+1)!} \geq u_n$, donc $(u_n)_n$ est croissante.

Pour $(v_n)_n$, on calcule

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= u_{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+1)!} - u_n - \frac{1}{n n!} = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)(n+1)!} - \frac{1}{n n!} \\ &= \frac{1}{(n+1)n(n+1)!} ((n+1)n + n - (n+1)^2) \\ &= -\frac{1}{(n+1)n(n+1)!} < 0 . \end{aligned}$$

Donc $(v_n)_n$ est décroissante.

2. $u_1 = 1$ et $v_1 = u_1 + 1 = 2$.

On a

$$u_1 \leq u_n \leq v_n \leq v_1 .$$

Donc

$$1 \leq u_n \leq v_n \leq 2 ,$$

$(u_n)_n$ est croissante et majorée (par 2), donc $(u_n)_n$ est convergente.

$(v_n)_n$ est décroissante et minorée (par 1), donc $(v_n)_n$ est convergente.