

## Feuille 8 : Limites et continuité des fonctions

**Exercice 8-1** Soit  $f(x) = \begin{cases} -2x & \text{si } x \leq -1 \\ x^2 + 1 & \text{si } -1 < x \leq 0 \\ \sin(x/4) & \text{si } x > 0. \end{cases}$

1. Dessiner le graphe de  $f$ .
  2. Calculer les limites suivantes :
- |                                     |                                    |                                      |
|-------------------------------------|------------------------------------|--------------------------------------|
| a) $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x)$ | c) $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ | e) $\lim_{x \rightarrow \pi^-} f(x)$ |
| b) $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$ | d) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ | f) $\lim_{x \rightarrow \pi^+} f(x)$ |

Est-ce que les limites suivantes existent ? Si oui, donner leur valeur.

- |                                   |                                  |                                    |
|-----------------------------------|----------------------------------|------------------------------------|
| a) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ | b) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ | c) $\lim_{x \rightarrow \pi} f(x)$ |
|-----------------------------------|----------------------------------|------------------------------------|

**Exercice 8-2** Calculer les limites suivantes :

1) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$	2) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1}$	3) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{2x + 5}{x - 4}$
4) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^9 - 17}{x^7}$	5) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^3 - 5x^2 + 7}{8 + 2x - 5x^3}$	6) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 3}{x^3 + 2}$
7) $\lim_{x \rightarrow 1}  x - 1 $	8) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{ x - 1 }$	9) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{1}{ x - 1 }$
10) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{1+x} - 1}$	11) $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1}{1-x} - \frac{1}{1-x^2} \right)$	12) $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 + 2x + 5} - x$
13) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x}$	14) $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$	15) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + \sin x}{x^2 + \cos x}$
16) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x$	17) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + 2 \sin(x)}{1 + \sqrt{x}}$	18) $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x - \sin x}$

**Exercice 8-3** On rappelle que  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$  et  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$  et que  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$ .

Calculer les limites suivantes :

1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{\sqrt{x}}$	2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin(1/x)}{\sin x}$	3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x}$
4) $\lim_{x \rightarrow 1/2} \frac{\cos(\pi x)}{1 - 2x}$	5) $\lim_{x \rightarrow 1/2} (2x^2 + x - 1) \tan(\pi x)$	6) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x^2}$
7) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + x^2)}{\sin^2 x}$	8) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} \ln^3 x$	9) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\exp(\ln^2 x)}{x^n}, n \in \mathbb{Z}$

**Exercice 8-4** Dans cet exercice, la notation  $E(x)$  désigne la partie entière d'un réel  $x$ . Calculer :

1) $\lim_{x \rightarrow 0} E(x+1)$	2) $\lim_{x \rightarrow 0} xE\left(\frac{1}{x}\right)$	3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} xE\left(\frac{1}{x}\right)$
------------------------------------	--	--

**Exercice 8-5**

1) Si $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - 5}{x - 2} = 5$ , trouver $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ .	2) Si $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} = -2$ , trouver $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ .
---	--

**Exercice 8-6** Étudier la continuité à gauche, la continuité à droite et la continuité des fonctions suivantes en chaque point de leur domaine de définition.

1.  $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 2x - 1 & \text{si } 1 < x \leq 2 \end{cases}$

2.  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $g(x) = x + \frac{\sqrt{x^2}}{x}$  si  $x \neq 0$  et  $g(0) = 1$ .

### Exercice 8-7

1. Déterminer les valeurs de  $k \in \mathbb{R}$  pour lesquelles  $f_k$  définie par  $f_k(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 2 \\ k - x^2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$  est une fonction continue.
2. Soit  $f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{R}$  l'application définie par  $f(x) = \frac{1+x^3}{1+x}$ . Trouver une application continue  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $g|_{\mathbb{R} \setminus \{-1\}} = f$

**Exercice 8-8** Montrer que l'équation  $x^3 - 15x + 1 = 0$  a trois solutions dans l'intervalle  $[-4, 4]$ .

**Exercice 8-9** Montrer qu'il existe  $x \in [3\pi/4, \pi]$  tel que

$$\tan x + \frac{x}{3} = 0.$$

**Exercice 8-10** Pour tout entier  $n \geq 2$ , on considère la fonction  $f_n : [1, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  donnée par

$$f_n(x) = x^n - x - 1$$

1. Soit  $n \geq 2$ , montrer qu'il existe un unique  $x_n > 1$  tel que  $f_n(x_n) = 0$ .
2. Soit  $n \geq 2$ , montrer que  $f_{n+1}(x_n) > 0$ .
3. En déduire que la suite  $(x_n)_{n \geq 2}$  est décroissante et converge vers une limite  $l$ .
4. Déterminer  $l$ .

**Exercice 8-11** Soient  $a$  et  $b$  deux nombres réels tels que  $a < b$  et  $f$  une application de  $[a, b]$  vers  $[a, b]$ .

1. On suppose que pour tout  $(x, y) \in [a, b] \times [a, b]$  on a

$$|f(x) - f(y)| \leq |x - y|$$

Montrer que  $f$  est continue. En déduire qu'il existe au moins un  $u \in [a, b]$  tel que  $f(u) = u$ . On pourra utiliser la fonction  $g$  de  $[a, b]$  vers  $\mathbb{R}$  définie par  $g(x) = f(x) - x$ .

2. On suppose maintenant que pour tout  $(x, y) \in [a, b] \times [a, b]$  avec  $x \neq y$  on a

$$|f(x) - f(y)| < |x - y|$$

Montrer qu'il existe un unique  $u \in [a, b]$  tel que  $f(u) = u$ .

**Exercice 8-12** Montrer que si  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction continue telle que  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ , alors  $f$  est surjective.

**Exercice 8-13** Vrai ou faux ?

1. Si  $f$  est continue sur un intervalle fermé borné  $[a, b]$  vers  $\mathbb{R}$ , alors  $f([a, b])$  est un intervalle fermé borné.
2. Si  $f$  est continue sur un intervalle ouvert borné  $]a, b[$  vers  $\mathbb{R}$ , alors  $f(]a, b[)$  est un intervalle ouvert borné.
3. Si  $f$  est continue sur un intervalle ouvert borné  $]a, b[$  vers  $\mathbb{R}$ , alors  $f(]a, b[)$  est un intervalle ouvert, mais pas forcément borné.
4. Si  $f$  est continue sur un intervalle ouvert borné  $]a, b[$  vers  $\mathbb{R}$ , alors  $f(]a, b[)$  est un intervalle, mais pas forcément ouvert ni borné.

**Exercice 8-14**

1. Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue et périodique. Montrer que  $f$  est bornée.
2. En utilisant le résultat précédent, calculer la limite

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x(\sin^8 x + \cos^{14} x)}.$$

**Exercice 8-101** Calculer les limites suivantes :

$$\begin{array}{lll} 1) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x+5} - \sqrt{x-3} & 2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + x + 1} - (x + 1) & 3) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x} \\ 4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{\sin(3x)} & 5) \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln^2 x - \sqrt{x} & 6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos(3x))}{\ln(\cos(2x))} \\ 7) \lim_{x \rightarrow 1^+} \ln x \ln(\ln x) & 8) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+1)}{\ln x} & 9) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \sqrt{x}}{\ln x + x} \end{array}$$

**Exercice 8-102** Soit  $f$  une fonction décroissante sur  $]0; +\infty[$  telle que :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ . Démontrer que, pour tout  $x \in \mathbb{R}^+$  on a l'inégalité :  $f(x) \geq 0$ .

**Exercice 8-103** Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction périodique qui admet une limite en  $+\infty$ . Que peut-on dire de  $f$  ?

**Exercice 8-104**

1. Soient  $n \in \mathbb{N}$  un entier impair et, pour chaque  $i \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$   $a_i$  un réel. Montrer que l'équation  $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$  admet au moins une solution réelle.
2. Donner un contre-exemple pour le cas où  $n$  est pair.

**Exercice 8-105** Supposons que  $f$  est une fonction continue sur  $[0, 1]$  et que  $0 \leq f(x) \leq 1$  pour chaque  $x \in [0, 1]$ . Montrer qu'il existe un  $c \in \mathbb{R}$  tel que  $f(c) = c$ .

**Exercice 8-106** Étudier la continuité de la fonction  $f : [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(x) = x^2 \sin(\pi/x)$  si  $x \neq 0$  et  $f(0) = 0$ , sur le domaine de définition.

**Exercice 8-107** Étudier la continuité à gauche, la continuité à droite et la continuité en chaque point de son domaine de définition de la fonction :  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(x) = xE(1/x)$  si  $x \neq 0$  et  $f(0) = 1$ , où  $E$  dénote la partie entière.

**Exercice 8-108** Déterminer les valeurs de  $m \in \mathbb{R}$  pour lesquelles  $g_m$  définie par  $g_m(x) = \begin{cases} x - m & \text{si } x \leq 3 \\ 1 - mx & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$  est une fonction continue.

**Exercice 8-109** Quelles sont les fonctions  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continues dont l'image est contenue dans  $\mathbb{Z}$  ? dans  $\mathbb{Q}$  ?

**Exercice 8-110** Soient  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  supposée bornée et  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  supposée continue. Montrer que  $g \circ f$  et  $f \circ g$  sont bornées.

**Exercice 8-111** Soit  $I$  un intervalle ouvert de  $\mathbb{R}$ ,  $f$  et  $g$  deux fonctions définies sur  $I$ .

1. Soit  $a \in I$ . Donner une raison pour laquelle :

$$(\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)) \Rightarrow (\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = |f(a)|)$$

2. En utilisant la question précédente, montrer que si  $f$  et  $g$  sont continues, alors  $\sup(f, g) = \frac{1}{2}(f + g + |f - g|)$  l'est aussi.