

Feuille 8 : Limites et continuité des fonctions

Exercice 8-1 Soit $f(x) = \begin{cases} -2x & \text{si } x \leq -1 \\ x^2 + 1 & \text{si } -1 < x \leq 0 \\ \sin(x/4) & \text{si } x > 0. \end{cases}$

1. Dessiner le graphe de f .
2. Calculer les limites suivantes :

a) $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x)$	c) $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$	e) $\lim_{x \rightarrow \pi^-} f(x)$
b) $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$	d) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$	f) $\lim_{x \rightarrow \pi^+} f(x)$

Est-ce que les limites suivantes existent ? Si oui, donner leur valeur.

a) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$	b) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$	c) $\lim_{x \rightarrow \pi} f(x)$
-----------------------------------	----------------------------------	------------------------------------

Exercice 8-2 Calculer les limites suivantes :

1) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$	2) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1}$	3) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{2x + 5}{x - 4}$
4) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^9 - 17}{x^7}$	5) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^3 - 5x^2 + 7}{8 + 2x - 5x^3}$	6) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 3}{x^3 + 2}$
7) $\lim_{x \rightarrow 1} x - 1 $	8) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{ x - 1 }$	9) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{1}{ x - 1 }$
10) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{1 + x} - 1}$	11) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1 - x} - \frac{1}{1 - x^2} \right)$	12) $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 + 2x + 5} - x$
13) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x}$	14) $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$	15) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + \sin x}{x^2 + \cos x}$
16) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x$	17) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + 2 \sin(x)}{1 + \sqrt{x}}$	18) $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x - \sin x}$

Exercice 8-3 On rappelle que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + x)}{x} = 1$ et que $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$.

Calculer les limites suivantes :

1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{\sqrt{x}}$	2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin(1/x)}{\sin x}$	3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x}$
4) $\lim_{x \rightarrow 1/2} \frac{\cos(\pi x)}{1 - 2x}$	5) $\lim_{x \rightarrow 1/2} (2x^2 + x - 1) \tan(\pi x)$	6) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x^2}$
7) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + x^2)}{\sin^2 x}$	8) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} \ln^3 x$	9) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\exp(\ln^2 x)}{x^n}, n \in \mathbb{Z}$

Exercice 8-4 Dans cet exercice, la notation $E(x)$ désigne la partie entière d'un réel x . Calculer :

1) $\lim_{x \rightarrow 0} E(x + 1)$	2) $\lim_{x \rightarrow 0} xE\left(\frac{1}{x}\right)$	3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} xE\left(\frac{1}{x}\right)$
--------------------------------------	--	--

Exercice 8-5

1) Si $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - 5}{x - 2} = 5$, trouver $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$.	2) Si $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} = -2$, trouver $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$.
---	--

Exercice 8-6 Étudier la continuité à gauche, la continuité à droite et la continuité des fonctions suivantes en chaque point de leur domaine de définition.

1. $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 2x - 1 & \text{si } 1 < x \leq 2 \end{cases}$

2. $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x) = x + \frac{\sqrt{x^2}}{x}$ si $x \neq 0$ et $g(0) = 1$.

Exercice 8-7

- Déterminer les valeurs de $k \in \mathbb{R}$ pour lesquelles f_k définie par $f_k(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 2 \\ k - x^2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$ est une fonction continue.
- Soit $f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x) = \frac{1+x^3}{1+x}$. Trouver une application continue $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $g|_{\mathbb{R} \setminus \{-1\}} = f$

Exercice 8-8 Montrer que l'équation $x^3 - 15x + 1 = 0$ a trois solutions dans l'intervalle $[-4, 4]$.

Exercice 8-9 Montrer qu'il existe $x \in [3\pi/4, \pi]$ tel que

$$\tan x + \frac{x}{3} = 0.$$

Exercice 8-10 Pour tout entier $n \geq 2$, on considère la fonction $f_n : [1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ donnée par

$$f_n(x) = x^n - x - 1$$

- Soit $n \geq 2$, montrer qu'il existe un unique $x_n > 1$ tel que $f_n(x_n) = 0$.
- Soit $n \geq 2$, montrer que $f_{n+1}(x_n) > 0$.
- En déduire que la suite $(x_n)_{n \geq 2}$ est décroissante et converge vers une limite l .
- Déterminer l .

Exercice 8-11 Soient a et b deux nombres réels tels que $a < b$ et f une application de $[a, b]$ vers $[a, b]$.

- On suppose que pour tout $(x, y) \in [a, b] \times [a, b]$ on a

$$|f(x) - f(y)| \leq |x - y|$$

Montrer que f est continue. En déduire qu'il existe au moins un $u \in [a, b]$ tel que $f(u) = u$. On pourra utiliser la fonction g de $[a, b]$ vers \mathbb{R} définie par $g(x) = f(x) - x$.

- On suppose maintenant que pour tout $(x, y) \in [a, b] \times [a, b]$ avec $x \neq y$ on a

$$|f(x) - f(y)| < |x - y|$$

Montrer qu'il existe un unique $u \in [a, b]$ tel que $f(u) = u$.

Exercice 8-12 Montrer que si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue telle que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, alors f est surjective.

Exercice 8-13 Vrai ou faux ?

- Si f est continue sur un intervalle fermé borné $[a, b]$ vers \mathbb{R} , alors $f([a, b])$ est un intervalle fermé borné.
- Si f est continue sur un intervalle ouvert borné $]a, b[$ vers \mathbb{R} , alors $f(]a, b[)$ est un intervalle ouvert borné.
- Si f est continue sur un intervalle ouvert borné $]a, b[$ vers \mathbb{R} , alors $f(]a, b[)$ est un intervalle ouvert, mais pas forcément borné.
- Si f est continue sur un intervalle ouvert borné $]a, b[$ vers \mathbb{R} , alors $f(]a, b[)$ est un intervalle, mais pas forcément ouvert ni borné.

Exercice 8-14

- Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et périodique. Montrer que f est bornée.
- En utilisant le résultat précédent, calculer la limite

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x(\sin^8 x + \cos^{14} x)}.$$

Exercice 8-101 Calculer les limites suivantes :

$$\begin{array}{lll} 1) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x+5} - \sqrt{x-3} & 2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + x + 1} - (x+1) & 3) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x} \\ 4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{\sin(3x)} & 5) \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln^2 x - \sqrt{x} & 6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos(3x))}{\ln(\cos(2x))} \\ 7) \lim_{x \rightarrow 1^+} \ln x \ln(\ln x) & 8) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+1)}{\ln x} & 9) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \sqrt{x}}{\ln x + x} \end{array}$$

Exercice 8-102 Soit f une fonction décroissante sur $]0; +\infty[$ telle que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$. Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$ on a l'inégalité : $f(x) \geq 0$.

Exercice 8-103 Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction périodique qui admet une limite en $+\infty$. Que peut-on dire de f ?

Exercice 8-104

1. Soient $n \in \mathbb{N}$ un entier impair et, pour chaque $i \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$ a_i un réel. Montrer que l'équation $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$ admet au moins une solution réelle.
2. Donner un contre-exemple pour le cas où n est pair.

Exercice 8-105 Supposons que f est une fonction continue sur $[0, 1]$ et que $0 \leq f(x) \leq 1$ pour chaque $x \in [0, 1]$. Montrer qu'il existe un $c \in \mathbb{R}$ tel que $f(c) = c$.

Exercice 8-106 Étudier la continuité de la fonction $f : [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2 \sin(\pi/x)$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$, sur le domaine de définition.

Exercice 8-107 Étudier la continuité à gauche, la continuité à droite et la continuité en chaque point de son domaine de définition de la fonction : $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = xE(1/x)$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 1$, où E dénote la partie entière.

Exercice 8-108 Déterminer les valeurs de $m \in \mathbb{R}$ pour lesquelles g_m définie par $g_m(x) = \begin{cases} x - m & \text{si } x \leq 3 \\ 1 - mx & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$

est une fonction continue.

Exercice 8-109 Quelles sont les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continues dont l'image est contenue dans \mathbb{Z} ? dans \mathbb{Q} ?

Exercice 8-110 Soient $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ supposée bornée et $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ supposée continue. Montrer que $g \circ f$ et $f \circ g$ sont bornées.

Exercice 8-111 Soit I un intervalle ouvert de \mathbb{R} , f et g deux fonctions définies sur I .

1. Soit $a \in I$. Donner une raison pour laquelle :

$$\left(\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) \right) \Rightarrow \left(\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = |f(a)| \right)$$

2. En utilisant la question précédente, montrer que si f et g sont continues, alors $\sup(f, g) = \frac{1}{2}(f + g + |f - g|)$ l'est aussi.