Feuille 9 : Polynômes

Exercice 9-1
Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $P_n = (1+X)(1+X^2)(1+X^4)...(1+X^{2^n})$. Calculer les coefficients de P_n.

CORRECTION
On montre par récurrence que les coefficients de P_n sont tous égaux à 1. Pour $n \in \mathbb{N}$ notons $A(n)$ la proposition "$P_n = 1 + X + X^2 + \ldots + X^{2^{n+1}-1}$".

$P_0 = 1 + X$ donc $A(0)$ est vraie. Soit $n \in \mathbb{N}$, et supposons $A(n)$ vraie. Alors

$$\begin{aligned} P_{n+1} = P_n(1+X^{2^{n+1}}) &= P_n + X^{2^{n+1}}(1+X+X^2+\ldots+X^{2^{n+1}-1}) \\ &= 1+X+X^2+\ldots+X^{2^{n+1}-1}+X^{2^{n+1}}+\ldots+X^{2^{n+1}-1+2^{n+1}} \\ &= 1+X+X^2+\ldots+X^{2^{n+2}-1}, \end{aligned}$$

d'où $A(n+1)$ est vraie. On en déduit que $A(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 9-2
Déterminer tous les polynômes P de $\mathbb{R}[X]$ vérifiant les relations suivantes :
1. $P(X^2+1) = P(X)$
2. $P(2X+1) = P(X)$

CORRECTION
Remarquons que $P = 0$ convient. On suppose maintenant que $P \neq 0$ et on pose $\deg P = n \geq 0$.

1. En supposant l'égalité, et en regardant les degrés, on trouve que
$$\deg P(X^2+1) = 2n = n = \deg P\,.$$
Cela implique que $n = 0$ et donc $P(X) = a$, avec $a \in \mathbb{R}$. Réciproquement, si P est un polynôme constant, la rélation est facilement vérifiée.
Donc, la rélation est vérifiée si est seulement si P est constant.
2. Soit $P(X) = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_1X + a_0$, avec $a_j \in \mathbb{R}$ pour tout $0 \leq j \leq n$. Le coefficient dominant du polynôme composé $P(2X+1)$ est alors a_n2^n. Par égalité, il faut alors $a_n = a_n2^n$; cela est vrai si et seulement si $2^n = 1$, et donc si et seulement si $n = 0$ (autrement dit, $a_k = 0$ pour tout $k \geq 1$). Encore une fois, on trouve que les seuls polynômes qui vérifient l'égalité sont les polynômes constants : il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $P(X) = a$.

Exercice 9-3
Pour a, b réels, on note $P_{a,b} = X^4 + 2aX^3 + bX^2 + 2X + 1$. Pour quelles valeurs de a et b le polynôme $P_{a,b}$ est-il le carré d'un polynôme de $\mathbb{R}[X]$?

CORRECTION
Si $P = Q^2$ est le carré d'un polynôme, alors Q est nécessairement de degré 2, et son coefficient dominant est égal à 1 ou à -1. Dans le premier cas, on peut écrire $Q(X) = X^2 + cX + d$. On a alors $Q^2(X) = X^4 + 2cX^3 + (2d+c^2)X^2 + 2cdX + d^2$. Par identification, on doit avoir $2c = 2a$, $2d + c^2 = b$, $2cd = 2$ et $d^2 = 1$. On trouve donc $c = a$ et $d = \pm 1$. Si $d = 1$, alors $c = 1$, et donc $a = 1$ et $b = 3$. Si $d = -1$, alors $c = -1$, $a = -1$ et $b = -1$. Les deux solutions sont donc $P_1(X) = X^4+2X^3+3X^2+2X+1 = (X^2+X+1)^2$ et $P_2(X) = X^4 - 2X^3 - X^2 + 2X + 1 = (X^2 - X - 1)^2$.

Dans le deuxième cas, on écrit $Q(X) = -R(X)$ avec $R(X) = X^2 + cX + d$, de sorte que $Q^2(X) = R^2(X)$ et on retrouve en réalité le cas précédent.

Exercice 9-4
On considère l'équation suivante dans $\mathbb{C}[X]$: $P(2X) = P'(X)P''(X)$.

1. On note P une solution non nulle de cette équation, δ son degré et a son coefficient dominant.
   a) Quel est le degré de $P(2X)$? De $P'P''$? En déduire la valeur de δ.
   b) Quel est le coefficient dominant de $P(2X)$? De $P'P''$? En déduire la valeur de a.
   c) Déterminer P.
2. Conclure.

CORRECTION

1. Soient $\delta = \deg P \geq 0$ et $a \in \mathbb{C}$ le coefficient dominant de P.
   a) $\deg P(2X) = \delta$. Comme P est non nul et $P(2X) = P'P''$, ni P' ni P'' ne sont nuls, donc $\deg P' = \delta - 1$ et $\deg P'' = \delta - 2$. Donc $\deg\big(P'P''\big) = 2\delta - 3$. Il faut donc $\delta = 2\delta - 3$, qui implique $\delta = 3$.
   b) En vue de la question précédente, le coefficient dominant de $P(2X)$ est $8a$, celui de P' est $3a$ et celui de P'' est $6a$. Le coefficient dominant de $P'P''$ est alors $3a \cdot 6a = 18a^2$: pour avoir l'égalité, il faut donc que $8a = 18a^2$, c'est-à-dire
   $$a\,(9a - 4) = 0\,.$$
   La solution $a = 0$ n'est pas acceptable (sinon, $\deg P < 3$), et alors $a = 4/9$.
   c) De façon analogue, si on écrit $P(X) = aX^3 + bX^2 + cX + d$ et on calcule explicitement les polynômes $P(2X)$ et $\big(P'P''\big)(X)$, on trouve les égalités
   $$\begin{cases} 4b = 18ab \\ 2c = 6ac + 4b^2 \\ d = 2bc\,, \end{cases}$$
   qui impliquent $b = c = d = 0$.
2. Donc, les seuls polynôme qui vérifient l'égalité donnée sont le polynôme $P(X) = (4/9)X^3$ et le polynôme nul.

Exercice 9-5
Quelles sont les racines (dans $\mathbb{C}$ et dans $\mathbb{R}$) des polynômes suivants ?

1. $X^3 - 7X^2 + 14X - 8$ 2. $X^6 - 4$ 3. $X^4 - 13X^2 + 36$ 4. $X^4 + 6X^2 + 25$.

CORRECTION

1. 1 est racine évidente de $X^3-7X^2+14X-8$. On factorise donc $X^3-7X^2+14X-8 = (X-1)(X^2-6X+8)$ et on calcule les racines de $X^2 - 6X + 8$ qui sont 2 et 4.
2. $X^6 - 4 = (X^3)^2 - 4 = (X^3 - 2)(X^3 + 2)$. Dans $\mathbb{R}$ chacun de ces facteurs a une unique racine, on trouve donc deux racines réelles : $\sqrt[3]{2}$ et $-\sqrt[3]{2}$. Dans $\mathbb{C}$ on calcule les racines 3-ièmes de 2 et -2. On trouve au total 6 racines complexes distinctes : $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[3]{2}e^{\frac{i2\pi}{3}}$, $\sqrt[3]{2}e^{\frac{-i2\pi}{3}}$, $-\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[3]{2}e^{\frac{i\pi}{3}}$, $\sqrt[3]{2}e^{\frac{i5\pi}{3}}$.
3. On factorise $Y^2 - 13Y + 36 = (Y - 9)(Y - 4)$ et on pour chaque racine y de ce polynôme on résout $X^2 = y$. On a donc que $3, -3, 2, -2$ sont les racines de $X^4 - 13X^2 + 36$.
4. On trouve les racines complexes de $Y^2 + 6Y + 25$ qui sont $y_1 = -3 + 4i$ et $y_2 = -3 - 4i$ et on calcule les racines carrées de chacun de ces deux nombres complexes. On trouve finalement 4 racines complexes (non réelles) : $\pm 1 \pm 2i$.

Exercice 9-6

1. Soit $m \geq 1$ un entier. Quelles sont les racines (dans $\mathbb{C}$ et dans $\mathbb{R}$) du polynôme $X^m - 1$?
2. Soit $n \geq 1$ un entier. Quelles sont les racines (dans $\mathbb{C}$ et dans $\mathbb{R}$) du polynôme $X^n + X^{n-1} + \ldots + X + 1$?

CORRECTION

1. Du chapitre sur les complexes, on sait que les racines complexes du polynôme $X^m - 1$ sont les m racines m-ièmes de l'unité :
$$\left\{e^{2\pi i\, k/m}\right\}_{k=0,\dots,m-1} .$$
De ça, on déduit que :
   - si m est impair, la seule racine réelle est 1 ;
   - si m est pair, il y a deux racines réeles, 1 et -1.
2. Soit $Q(X) = X^n + X^{n-1} + \ldots + X + 1$. On sait que $(X-1)Q(X) = X^{n+1} - 1$. Grâce à la question précédente, on déduit que les racines complexes de Q sont
$$\left\{e^{2\pi i\, k/m}\right\}_{k=1,\dots,m-1} .$$
Pour les racines réelles :
   - si n est pair, Q n'a pas de racines réelles ;
   - si n est impair, la seule racine réelle de Q est -1.

Exercice 9-7
Montrer que le polynôme $X^{163} + 24X^{57} - 6$ a au moins une racine sur $\mathbb{R}$.

CORRECTION
On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^{163} + 24x^{57} - 6$. Elle est continue sur son domaine. Puisque $f(0) = -6$ et $\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty$ par le théroème des valeurs intermédiaires on déduit qu'il existe un réel $x > 0$ tel que $f(x) = 0$. Le polynôme $X^{163} + 24X^{57} - 6$ a donc au moins une racine sur $\mathbb{R}$.

Exercice 9-8
Deux polynômes U et V réels vérifient $U(x)\sin(x) + V(x)\cos(x) = 0$ pour tout $x > 0$. Montrez que U et V sont tous deux égaux au polynôme nul.

CORRECTION
Pour tout $x > 0$ et $x \neq n\pi$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, grâce à l'égalité précédente, on peut écrire
$$U(x) = -\frac{\cos x}{\sin x} V(x) .$$
On en déduit que U a un nombre infini de racines : notamment, pour tout $k \in \mathbb{N}$, le nombre réel $x = \pi/2 + k\pi$ est une racine de U. Par le théorème fondamental de l'algèbre, U est donc le polynôme nul. Un raisonnement analogue montre que aussi V est le polynôme nul.

Exercice 9-9
On définit une suite de polynômes $P_0 = 2$, $P_1 = X$ et $P_{n+2} = XP_{n+1} - P_n$.

1. Déterminer le degré et le coefficient dominant de P_n.
2. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, $P_n(z + \frac{1}{z}) = z^n + \frac{1}{z^n}$.
3. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Calculer $P_n(2\cos\theta)$.
4. Donner les racines de P_n.

CORRECTION

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ on note $H(n)$ la proposition : P_n est de degré n et son coefficient dominant est 1. On calcule $P_2 = X^2 - 2$. Les propositions $H(1)$ et $H(2)$ sont vraies. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ et supposons $H(k)$ vraie pour tout $k \leq n$. Le degré de XP_n est donc $n+1$ et le degré de P_{n-1} est $n-1$, donc le degré de P_{n+1} est $n+1$. Le coefficient dominant de P_{n+1} est celui de XP_n donc c'est 1. On en déduit que $H(n+1)$ est vraie et donc la propriété est vraie pour tout $n \geq 1$.

2. Pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ on note $A(n)$ la proposition : "pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, $P_n(z+\frac{1}{z}) = z^n + \frac{1}{z^n}$."
   Les propositions $A(1)$ et $A(2)$ sont vraies. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ et supposons $A(k)$ vraie pour tout $k \leq n$. On calcule
$$\begin{aligned} P_{n+1}(z+\frac{1}{z}) &= (z+\frac{1}{z})P_n(z+\frac{1}{z}) - P_{n-1}(z+\frac{1}{z}) \\ &= (z+\frac{1}{z})(z^n+\frac{1}{z^n}) - (z^{n-1}+\frac{1}{z^{n-1}}) \\ &= z^{n+1}+z^{n-1}+\frac{1}{z^{n-1}}+\frac{1}{z^{n+1}} - (z^{n-1}+\frac{1}{z^{n-1}}) \\ &= z^{n+1}+\frac{1}{z^{n+1}}. \end{aligned}$$
   On en déduit que $A(n+1)$ est vraie et donc la propriété est vraie pour tout $n \geq 1$.
3. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $B(n)$ la proposition : "$P_n(2\cos\theta) = 2\cos(n\theta)$"
   Les propositions $B(0)$ et $B(1)$ sont vraies. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ et supposons $B(k)$ vraie pour tout $k \leq n$. On calcule
$$\begin{aligned} P_{n+1}(2\cos\theta) &= (2\cos\theta)P_n(2\cos\theta) - P_{n-1}(2\cos\theta) \\ &= 2(\cos\theta)2\cos(n\theta) - 2\cos(n-1)\theta \\ &= 2(\cos\theta)2\cos(n\theta) - 2\cos(n\theta-\theta) \\ &= 2(\cos\theta)2\cos(n\theta) - 2\cos(n\theta)\cos\theta - 2\sin(n\theta)\sin\theta \\ &= 2\cos((n+1)\theta) \end{aligned}$$
   On en déduit que $B(n+1)$ est vraie et donc la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. Puisque P_n est de degré n et $P_n(2\cos\theta) = 2\cos(n\theta)$, on déduit que ses racines (pour $n \geq 1$) sont les réels $x_k = 2\cos(\frac{\pi}{2n} + \frac{2k\pi}{n})$ pour $k = 0, 1\ldots, n-1$.

Exercice 9-10

1. Soient P_1, P_2 et Q trois polynômes. Montrer que $P_1 - P_2$ divise $Q(P_1) - Q(P_2)$.
2. Soit P un polynôme. Montrer que $P(X) - X$ divise $P(P(X)) - X$.

CORRECTION

1. Il suffit de montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_1 - P_2$ divise $\big(P_1\big)^n - \big(P_2\big)^n$. Pour $n = 0$, la dernière expression est le polynôme nul, donc il n'y a rien a montrer. Pour $n \geq 1$, cela est une conséquence immédiate du fait que
$$X^n - Y^n \;=\; (X-Y)\,\Big(X^{n-1} + X^{n-2}Y + \ldots + X^{n-1-k}Y^k + \ldots + XY^{n-2} + Y^{n-1}\Big)\,.$$
2. On peut écrire
$$P\big(P(X)\big) - X \;=\; \Big(P\big(P(X)\big) - P(X)\Big) \,+\, \Big(P(X) - X\Big)\,.$$
   Bien sûr, $P(X) - X$ divise lui-même. D'autre côté, $P(X) - X$ divise aussi $P\big(P(X)\big) - P(X)$, par le point précédent (l'appliquer avec $Q = P$, $P_1 = P$ et $P_2(X) = X$).

Exercice 9-11

Pour chacun des polynômes suivants, dresser la liste complète des polynômes le divisant dans l'anneau de polynômes précisé :
1. $X+1$ dans $\mathbb{R}[X]$ 2. X^2-1 dans $\mathbb{R}[X]$ 3. X^2+1 dans $\mathbb{C}[X]$ 4. X^2+1 dans $\mathbb{R}[X]$

CORRECTION

1. 1, $X+1$.
2. 1, $X-1$, $X+1$, X^2-1.
3. 1, $X-i$, $X+i$, X^2+1.
4. 1, X^2+1.

Exercice 9-12 Soit $n \geq 1$ un entier.

1. Déterminer le reste de la division euclidienne de X^{5n} par $X^5 - 1$.
2. En déduire le reste de la division euclidienne de $X^{99} + 2X^{42} - 3X^{35} - 2X^{27} + 3$ par $X^5 - 1$.

CORRECTION

1. Après avoir calculer explicitement les cas $n = 0$ et $n = 1$, pour lesquels on a
$$1 \;=\; 0 \cdot (X^5 - 1) + 1 \qquad\qquad \text{et} \qquad\qquad X^5 \;=\; 1 \cdot (X^5 - 1) + 1\,,$$
on va prouver par récurrence que le reste est toujours égal au polynôme constant 1.
Il suffit l'hérédité, l'initialisation ayant été faite pour $n = 0$. Soit donc $n \geq 1$; on suppose qu'il existe $K \in \mathbb{R}[X]$ tel que
$$X^{5n} \;=\; K(X)\,(X^5 - 1) \;+\; 1\,.$$
On peut alors écrire $X^{5(n+1)} \;=\; X^5\, X^{5n}$, d'où
$$\begin{aligned} X^{5(n+1)} \;&=\; X^5\,\Big(K(X)\,(X^5 - 1) \;+\; 1\Big) \\ &=\; X^5\,K(X)\,(X^5 - 1) \;+\; X^5 \;=\; X^5\,K(X)\,(X^5 - 1) \;+\; X^5 \;-\; 1 \;+\; 1 \\ &= (X^5 - 1)\,\Big(X^5\,K(X) \;+\; 1\Big) \;+\; 1\,. \end{aligned}$$
L'hérédité est donc vérifiée. On en déduit que la propriété est vraie pour tout $n \geq 0$.
2. Comme $99 \equiv 4$ [5], $42 \equiv 2$ [5], $35 \equiv 0$ [5] et $27 \equiv 2$ [5], de la question précédente on trouve que le reste est $X^4 \;+\; 2X^2 \;-\; 3 \;-\; 2X^2 \;+\; 3 \;=\; X^4$.

Exercice 9-13
Soit P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$. On note R le reste de sa division euclidienne par $X - 7$. Montrer que $R = P(7)$.

CORRECTION
On écrit la division euclidienne de P par $X - 7$: $P = Q(X - 7) + R$. On en déduit que R est de degré 0, donc une constante. On évalue les fonctions polynômiales $x \mapsto P(x)$ et $x \mapsto Q(x)(x - 7) + R$ en 7 et on trouve $P(7) = R$.

Exercice 9-14
Soient a un nombre réel et $n \geq 1$ un entier. On pose $A = (X \sin a + \cos a)^n$.
Déterminer le reste de la division euclidienne de A par $X^2 + 1$.

CORRECTION
Soit $A_n(X) \;:=\; (X \sin a + \cos a)^n$ Un calcul direct montre que
$$\begin{aligned} A_0(X) \;&=\; 0 \cdot (X^2 + 1) \;+\; 1 \\ A_1(X) \;&=\; 0 \cdot (X^2 + 1) \;+\; \Big(X\,\sin a \;+\; \cos a\Big) \\ A_2(X) \;&=\; \sin^2 a\,(X^2 + 1) \;+\; \Big(X\,\sin(2a) \;+\; \cos(2a)\Big)\,. \end{aligned}$$
Si on appelle le reste de la division $R_n(X)$, on va alors montrer par récurrence que, pour tout $n \geq 0$, on a
$$R_n(X) \;=\; X\,\sin(na) \;+\; \cos(na)\,.$$
L'initialisation est le cas $n = 0$, déjà traité ci-dessus. On montre l'hérédité. On suppose alors la propriété connue pour un certain $n \geq 1$ et on va la montrer pour $n + 1$.

Pour cela, on écrit $A_{n+1}(X) \;=\; A_n(X)\,\big(X \sin a \;+\; \cos a\big)$: en utilisant l'hypothèse de récurrence, on voit tout de suite que le reste de la division est donné par le produit $R_n(X)\,\big(X \sin a \;+\; \cos a\big)$. Si on calcule ce produit, on trouve
$$\begin{aligned} R_n(X)\,\big(X \sin a \;+\; \cos a\big) \;&=\; X^2\,\sin a\,\sin(na) \;+\; X\,\big(\sin a\,\cos(na) \;+\; \cos a\,\sin(na)\big) \;+\; \cos a\,\cos(na) \\ &=\; \sin a\,\sin(na)\,(X^2 + 1) \;+\; X\,\sin\big((n+1)a\big) \;+\; \cos a\,\cos(na) \;-\; \sin a\,\sin(na) \\ &=\; \sin a\,\sin(na)\,(X^2 + 1) \;+\; X\,\sin\big((n+1)a\big) \;+\; \cos\big((n+1)a\big)\,. \end{aligned}$$

On en déduit que le reste est donc bien

$$R_{n+1}(X) \;=\; X\,\sin\big((n+1)a\big) \;+\; \cos\big((n+1)a\big)\,,$$

comme voulu. L'hérédité est donc vérifiée. On peut alors affirmer que la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 9-15
Effectuer les divisions euclidiennes dans $\mathbb{R}[X]$ de
1. $3X^5 + 4X^2 + 1$ par $X^2 + 2X + 3$.
2. $3X^5 + 2X^4 - X^2 + 1$ par $X^3 + X + 2$.

CORRECTION

1. $3X^5 + 4X^2 + 1 = (X^2 + 2X + 3)(3X^3 - 6X^2 + 3X + 16) - 41X - 47$.
2. $3X^5 + 2X^4 - X^2 + 1 = (X^3 + X + 2)(3X^2 + 2X - 3) - 9X^2 - X + 7$.

Exercice 9-16
Soit $P(X) = X^4 - 5X^3 + 8X^2 - 10X + 12$ et $Q(X) = X^4 + X^2 - 2$. Déterminer le PGCD de P et Q puis déterminer deux polynômes U et V tels que $PU + QV = \mathrm{PGCD}(P, Q)$.

CORRECTION
On utilise l'algorithme d'Euclide :

$$\begin{aligned}
P(X) \;&=\; 1 \cdot Q(X) \;-\; \big(5X^3 - 7X^2 + 10X - 14\big)\\
Q(X) \;&=\;=\; \frac{1}{25}\,\big(5X + 7\big) \cdot \big(5X^3 - 7X^2 + 10X - 14\big) \;+\; \frac{24}{25}\,\big(X^2 + 2\big)\\
5X^3 - 7X^2 + 10X - 14 \;&=\; \big(5X - 7\big)\,\big(X^2 + 2\big)\,.
\end{aligned}$$

Donc $\mathrm{PGCD}(P, Q) \;=\; X^2 + 2$. En remontant les égalités précédentes, on trouve

$$\begin{aligned}
X^2 + 2 \;&=\; \frac{25}{24}\,Q(X) \;-\; \frac{1}{24}\,\big(5X + 7\big) \cdot \big(5X^3 - 7X^2 + 10X - 14\big)\\
&=\; \frac{25}{24}\,Q(X) \;+\; \frac{1}{24}\,\big(5X + 7\big) \cdot \Big(P(X) - Q(X)\Big)\\
&=\; \frac{1}{24}\,\big(5X + 7\big) \cdot P(X) \;-\; \frac{1}{24}\,\big(5X - 18\big)\,Q(X)\,.
\end{aligned}$$

Donc $U(X) \;=\; (1/24)\big(5X + 7\big)$ et $V(X) \;=\; -(1/24)\big(5X - 18\big)$.

Exercice 9-17
Factoriser les polynômes suivants en polynômes irréductibles :
1. $X^n + X^{n-1} + \cdots X + 1$ dans $\mathbb{C}[X]$
2. $X^{11} + 2^{11}$ dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$
3. $X^4 + 4$ dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$
4. $X^4 - j$ dans $\mathbb{C}[X]$, où $j = \exp(2i\pi/3)$
5. $X^8 + X^4 + 1$ dans $\mathbb{R}[X]$
6. $X^5 - 1$ dans $\mathbb{R}[X]$

CORRECTION

1. Puisque $X^{n+1} - 1 = (X - 1)(X^n + X^{n-1} + \cdots X + 1)$, les racines de $X^n + X^{n-1} + \cdots X + 1$ sont toutes les racines $n + 1$-ièmes de l'unité sauf 1. On peut donc factoriser sur $\mathbb{C}[X]$:

$$X^n + X^{n-1} + \cdots X + 1 = \prod_{k=1}^{n-1} (X - e^{\frac{i2k\pi}{n+1}}).$$

2. $X^{11} + 2^{11}$ a une unique racine réelle : -2, la factorisation dans $\mathbb{R}[X]$ en facteurs irréductibles est

$$X^{11} + 2^{11} = (X + 2)(X^{10} - 2X^9 + 4X^8 - \ldots + 2^{10}).$$

Dans $\mathbb{C}[X]$ on calcule les racines 11-ièmes de -2^{11} on trouve $X^{11} + 2^{11} = \prod_{k=0}^{11} (X - 2e^{\frac{i(1+2k)\pi}{11}})$.

3. Dans $\mathbb{R}[X]$ on a la factorisation $X^4+4=(X^2+2)^2-4X^2=(X^2+2X+2)(X^2-2X+2)$. Dans $\mathbb{C}[X]$ on a $X^4+4=(X-1-i)(X-1+i)(X+1-i)(X+1+i)$.
4. On calcule les 4 racines 4-ièmes de j et on obtient
$$X^4-j=\prod_{k=0}^{3}(X-e^{i(\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2})})=(X-\frac{\sqrt{3}}{2}-i\frac{1}{2})(X+\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2})(X+\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2})(X-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}).$$
5. $X^8+X^4+1=(X^4+1)^2-X^4=(X^4+1-X^2)(X^4+1+X^2)$.
D'autre part $X^4+1+X^2=(X^2+1)^2-X^2=(X^2+1+X)(X^2+1-X)$ et $X^4+1-X^2=(X^2+1)^2-3X^2=(X^2+1-\sqrt{3}X)(X^2+1+\sqrt{3}X)$. D'où
$$X^8+X^4+1=(X^2+1+X)(X^2+1-X)(X^2+1-\sqrt{3}X)(X^2+1+\sqrt{3}).$$
Ces quatres facteurs sont irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ (discriminant négatif).
6. X^5-1 a une unique racine réelle $X=1$, les autres racines sont conjuguées. On factorise d'abord dans $\mathbb{C}[X]$ en calulant les racines 5-ièmes de 1 et on regroupe les facteurs de la forme $(X-z)(X-\bar{z})$. On obtient finalement
$$\begin{aligned}
X^5-1 &= \prod_{k=-2}^{2}\left(X-e^{i\frac{2k\pi}{5}}\right)\\
&=(X-1)\left(X-e^{i\frac{2\pi}{5}}\right)\left(X-e^{-i\frac{2\pi}{5}}\right)\left(X-e^{i\frac{4\pi}{5}}\right)\left(X-e^{-i\frac{4\pi}{5}}\right)\\
&=(X-1)\left(X^2-2\cos\frac{2\pi}{5}X+1\right)\left(X^2-2\cos\frac{4\pi}{5}X+1\right)\\
&=(X-1)\left(X^2+\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)X+1\right)\left(X^2+\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}\right)X+1\right)
\end{aligned}$$

Exercice 9-18
Calculer le pgcd des couples de polynômes (P,Q) suivants :
1. $P=6(X-1)^2(X+2)^3(X^2+1)^4$ et $Q=15(X-1)(X+7)^3(X^2+1)$,
2. $P=X^7+2X^6-X-2$ et $Q=X^3+X^2-2X$,
3. $P=nX^{n+1}-(n+1)X^n+1$ et $Q=X(X-1)^2(X-2)$,
4. $P=X^5-X^4+X^3-X^2+X-1$ et $Q=X^7+X^5+8X^4+X^3+8X^2+8$.

CORRECTION
1. Les deux polynômes sont déjà décomposés en produit de facteurs irreductibles (sur $\mathbb{R}$) : on a alors
$$\mathrm{PGCD}(P,Q)\;=\;(X-1)\,(X^2+1)\,.$$
2. On voit facilement que
$$\begin{aligned}
P(X) &= X^6\,(X+2)\,-\,(X+2)\;=\;(X+2)\,(X^6-1)\;=\;(X+2)\,(X^3-1)\,(X^3+1)\\
&= (X+2)\,(X-1)\,(X^2+X+1)\,(X+1)\,(X^2-X+1)\\
Q(X) &= X\,(X^2+X-2)\;=\;X\,(X+2)\,(X-1)\,.
\end{aligned}$$
On en déduit que $\mathrm{PGCD}(P,Q)\;=\;(X-1)\,(X+2)$.
3. Si $n=0$ alors $P=0$ et donc $\mathrm{PGCD}(P,Q)=Q$. Sinon, on a $P(0)=1\neq 0$ et $P(2)=(n-1)2^n+1\neq 0$, tandis que $P(1)=0$. Il reste à voir si 1 est racine double de P. Pour cela, on calcule
$$P'(X)\;=\;n\,(n+1)\,X^n\;-\;n\,(n+1)\,X^{n-1}\;=\;n\,(n+1)X^{n-1}(X-1)\,.$$
D'où $\mathrm{PGCD}(P,Q)\;=\;(X-1)^2$.
4. On pourrait utiliser l'algorithme d'Euclide. Par contre, ici c'est simple à voir que
$$\begin{aligned}
P(X) &= X^4(X-1)+X^2(X-1)+(X-1)\;=\;(X-1)\,(X^4+X^2+1)\\
Q(X) &= X^3\,(X^4+X^2+1)+8(X^4+X^2+1)\;=\;(X^4+X^2+1)\,(X^3+8)\,.
\end{aligned}$$
Notez que çe n'est pas la décomposition en facteurs irréductibles de P et Q, mais c'est suffisant pour calculer le PGCD : on a $\mathrm{PGCD}(P,Q)=X^4+X^2+1$.

Exercice 9-19
Soit P le polynôme réel : $P = X^6 + 4X^5 + 8X^4 + 10X^3 + \alpha X^2 + 4X + 1$. On suppose que -1 est une racine de P.

1. Déterminer α.
2. Montrer que -1 est une racine double de P.
3. Montrer que j est une racine multiple de P.
4. Factoriser P, d'abord dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$.

CORRECTION

1. $P(-1) = 0$ donc $\alpha = 8$.
2. $X^6 + 4X^5 + 8X^4 + 10X^3 + \alpha X^2 + 4X + 1 = (X + 1)^2(X^4 + 2X^3 + 3X^2 + 2X + 1)$
3. j est une racine simple de X^2+X+1 et on remarque que $(X^2+X+1)^2 = X^4+2X^3+3X^2+2X+1$, donc j est racine double de P.
4. D'après la question ci-dessus on a la factorisation en irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$: $P = (X + 1)^2(X^4 + 2X^3 + 3X^2 + 2X + 1) = (X + 1)^2(X^2 + X + 1)^2$ et dans $\mathbb{C}[X]$ on a $P = (X + 1)^2(X - j)^2(X - \bar{j})^2$.

Exercice 9-20
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on considère le polynôme à coefficients réels $P = aX^{n+1} + bX^n + c$. Peut-on choisir a, b, c pour que P admette 1 comme racine multiple ? Quel est alors l'ordre de cette racine ?

CORRECTION
Calculons $P'(X) = a(n + 1)X^n + nbX^{n-1}$. Alors 1 est racine multiple de P si et seulement si $P(1) = 0$ et $P'(1) = 0$: ces deux conditions impliquent que

$$\begin{cases} a+b+c=0 \\ (n+1)a+nb=0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = -\dfrac{n}{n+1}\,b \\ c = -\dfrac{1}{n+1}\,b\,. \end{cases} \iff (a,b,c) = \left(-\frac{n}{n+1}b, b, -\frac{1}{n+1}b\right).$$

On déduit que $P'(X) = nb(-X^n + X^{n-1})$, puis en dérivant que $P''(X) = nb(-nX^{n-1} + (n-1)X^{n-2})$. Pour que 1 soit racine d'ordre au moins 3, il faut que $P''(1) = -nb = 0$, ce qui implique $b = 0$ et par suite que P est le polynôme nul. Donc si $P \neq 0$, 1 peut être une racine d'ordre au plus 2.

Exercice 9-21
Pour tout complexe a, on pose $P_a = 2X^3 + 3X^2 + 6X + a \in \mathbb{C}[X]$.

1. Calculer le PGCD de P_a et P'_a.
2. Pour quelles valeurs de a le polynôme P_a admet-il une racine double ? Pour chacune de ces valeurs, décomposer P_a en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$.

CORRECTION

1. $P'_a = 6X^2 + 6X + 6 = 6(X - j)(X - j^2)$ avec $j = e^{\frac{i2\pi}{3}}$. Donc $PGCD(P_a, P'_a) \neq 1$ seulement si j ou j^2 sont parmi les racines de P_a. Par ailleurs j et j^2 ne sont pas simultanément racine de P_a, sinon $X^2 + X + 1$ diviserai P_a ce qui n'est pas possible puisque $P_a = (X^2 + X + 1)(2X + 1) + 3X + a - 1$ et on voit bien que ce reste n'est nul pour aucune valeur de a. Si $P_a(j) = 0$ alors $\text{PGCD}(P_a, P'_a) = X - j$ et si $P_a(j^2) = 0$, $\text{PGCD}(P_a, P'_a) = X - j^2$.
2. Si $P_a(j) = 0$, j est donc racine double de P_a. Ce sera le cas si $2j^3 + 3j^2 + 6j + a = 0$ donc si

$$a = -3j^2 - 6j - 2 = -3(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}) - 6(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}) - 2 = \frac{5}{2} - i\frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

De la même façon on trouve que j^2 est racine double de P_a si $a = -\frac{5}{2} - i\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Exercice 9-22
On considère l'équation suivante dans $\mathbb{R}[X]$: $(P')^2 = 4P$.

1. Déterminer toutes les solutions constantes de l'équation.
2. Soit P une solution non constante. Déterminer le degré de P, puis montrer que P possède au moins une racine multiple.
3. Conclure.

CORRECTION

1. Si P est constant, alors P' est le polynôme nul, et donc, pour avoir l'égalité, il faut nécessairement que P soit le polynôme nul.
2. On pose $\deg P = n \geq 1$. On a $\deg(P') = n-1$, et donc il faut avoir $2(n-1) = n$, ce qui donne $n = 2$. D'autre part, puisque
$$\Big(P'(X)\Big)^2 = 4\,P(X)\,,$$
toute racine α de P est aussi racine de P' (et réciproquement) et donc α est une racine double. Maintenant, P' étant de degré 1, il admet une unique racine réelle, qui est donc la seule racine double de P.
3. Comme conséquence de la question précédente, on écrit $P(X) = a\,(X-b)^2$, d'où $P'(X) = 2a\,(X-b)$. De l'égalité précédente, on trouve
$$4a^2(X-b)^2 = 4a(X-b)^2\,.$$
Cela donne $a = 1$, tandis que $b \in \mathbb{R}$ peut être un réel quelconque.

Exercice 9-23
Soient α, β, γ les racines de l'équation $X^3 - 5X^2 + 6X - 1$. Déterminer la valeur exacte de
$$\frac{1}{1-\alpha} + \frac{1}{1-\beta} + \frac{1}{1-\gamma}\ .$$

CORRECTION
Puisque $X^3 - 5X^2 + 6X - 1 = (X-\alpha)(X-\beta)(X-\gamma)$ on en déduit en développant $\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma = 6$ et $\alpha + \beta + \gamma = 5$. De plus en évaluant en $X = 1$ on a aussi $(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma) = 1$. On calcule maintenant
$$\begin{aligned}\frac{1}{1-\alpha} + \frac{1}{1-\beta} + \frac{1}{1-\gamma} &= \frac{(1-\alpha)(1-\beta) + (1-\alpha)(1-\gamma) + (1-\beta)(1-\gamma)}{(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)} \\ &= 3 - 2(\alpha+\beta+\gamma) + \alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma \\ &= 3 - 2\cdot 5 + 6 = -1.\end{aligned}$$

Exercice 9-24
Soit $P = X^3 + 3X^2 + 2X + i \in \mathbb{C}[X]$.

1. Prouver que P n'a pas de racine réelle.
2. Soient α, β et γ les trois racines complexes de P. Calculer $\alpha+\beta+\gamma$, $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$ et $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3$.

CORRECTION

1. Supposons, par l'absurde, qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ racine de P. Alors $P(\alpha) = 0$, d'où on déduit
$$i = -2\alpha - 3\alpha^2 - \alpha^3 \in \mathbb{R}\ :$$
absurde. Donc P n'a pas de racines réelles.

2. On écrit

$$\begin{aligned} P(X) &= (X-\alpha)\,(X-\beta)\,(X-\gamma) \\ &= X^3 \,-\, (\alpha+\beta+\gamma)X^2 \,+\, (\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)X \,-\, \alpha\beta\gamma\,. \end{aligned}$$

Par identification, on trouve alors $\alpha+\beta+\gamma \,=\, -3$. Aussi, on a $\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma \,=\, 2$ et $\alpha\beta\gamma = -i$. De ces rélations, on déduit avant tout que

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2 \;=\; \big(\alpha+\beta+\gamma\big)^2 - 2\big(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma\big) \;=\; 9-4 \;=\; 5\,.$$

En plus, on a

$$\big(\alpha+\beta+\gamma\big)\,\big(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma\big) \;=\; \alpha^2\beta+\alpha^2\gamma+\alpha\beta^2+\alpha\gamma^2+\beta^2\gamma+\beta\gamma^2+3\alpha\beta\gamma\,,$$

ce qui donne

$$\alpha^2\beta+\alpha^2\gamma+\alpha\beta^2+\alpha\gamma^2+\beta^2\gamma+\beta\gamma^2 \;=\; 3i-6\,.$$

Maintenant on calcule

$$\big(\alpha+\beta+\gamma\big)^3 \;=\; \alpha^3+\beta^3+\gamma^3 \,+\, 3\big(\alpha^2\beta+\alpha^2\gamma+\alpha\beta^2+\alpha\gamma^2+\beta^2\gamma+\beta\gamma^2\big) \,+\, 6\alpha\beta\gamma\,,$$

d'où on trouve

$$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3 \;=\; (-3)^3 \,-\, 3\,(3i-6) \,-\, 6\,(-i) \;=\; -9 \,-\, 3i\,.$$

Exercice 9-101
Soient P et Q deux polynômes de $\mathbb{R}[X]$. On suppose que Q divise P. Montrer que Q^2 divise $PQ'-P'Q$.

CORRECTION
Si P est le polynôme nul, le résultat est évident. Sinon, il existe $A\in\mathbb{R}[X]$, $A\neq 0$ tel que $P=QA$. On a donc $P'=Q'A+QA'$. On calcule $PQ'-P'Q=(QA)Q'-(Q'A+QA')Q=Q^2A'$. Puisque $A\neq 0$, alors Q^2 divise bien $PQ'-P'Q$.

Exercice 9-102
Soit a et b deux réels distincts et P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$. On note λ et μ les restes respectifs de la division euclidienne de P par $X-a$ et par $X-b$.

1. Exprimer à l'aide de λ et μ le reste de la division euclidienne de P par $(X-a)(X-b)$.
2. Qu'a-t-on montré dans le cas particulier où $\lambda=\mu=0$?

CORRECTION

1. On écrit $P(X) \,=\, (X-a)\,Q(X) \,+\, \lambda$: on a alors $\lambda=P(a)$. De façon analogue, on a aussi $\mu=P(b)$. Si maintenant on écrit

$$P(X) \;=\; (X-a)\,(X-b)\,Q_1(X) \,+\, R(X)\,, \qquad\qquad \text{avec} \qquad R(X) \;=\; \alpha X+\beta\,,$$

en évaluant cette expression en a et b on trouve

$$\begin{cases} P(a) \;=\; \lambda \;=\; \alpha a+\beta \\ P(b) \;=\; \mu \;=\; \alpha b+\beta \end{cases}$$

L'hypothèse $a\neq b$ garantit qu'il existe une unique solution (α,β) de ce systéme : des calculs explicite s montrent que

$$\alpha \;=\; \frac{\lambda-\mu}{a-b} \qquad\qquad \text{et} \qquad\qquad \beta \;=\; \frac{a\mu-b\lambda}{a-b}\,.$$

2. En particulier, si $\lambda=\mu=0$, on déduit que $\alpha=\beta=0$, c'est-à-dire $R\equiv 0$, et donc $(X-a)(X-b)$ divise P.

Exercice 9-103

On définit une suite de polynômes $P_0 = 0$, $P_1 = 1$ et $P_{n+2} = XP_{n+1} - P_n$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, P_{n+1}^2 = 1 + P_nP_{n+2}$.
2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}, P_n$ et P_{n+1} sont premiers entre eux.
3. Etablir que pour tout $(m, n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$, on a :
$$P_{m+n} = P_nP_{m+1} - P_{n-1}P_m \ .$$
4. Monter que $(m, n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$, on a :
$$Pgcd(P_{m+n}, P_n) = Pgcd(P_m, P_n) \ .$$
5. Conclure que $Pgcd(P_m, P_n) = P_{Pgcd(m,n)}$.

CORRECTION

1. Pour $n \in \mathbb{N}$ on note $H(n)$ la propriété : $P_{n+1}^2 = 1 + P_nP_{n+2}$.
On a $P_2 = XP_1 - P_0 = X$ et $P_1^2 = 1 = 1 + 0 \cdot X$, donc $H(0)$ est vraie.
Soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons $H(k)$ vraie pour tout $k \in \mathbb{N}$, $k \leq n$. On calcule
$$\begin{aligned} 1 + P_{n+1}P_{n+3} &= 1 + P_{n+1}(XP_{n+2} - P_{n+1}) \\ &= 1 + XP_{n+1}P_{n+2} - P_{n+1}^2 \\ &= 1 + XP_{n+1}(XP_{n+1} - P_n) - 1 - P_n(XP_{n+1} - P_n) \\ &= X^2P_{n+1}^2 - 2XP_nP_{n+1} + P_n^2 \\ &= (XP_{n+1} - P_n)^2 = P_{n+2}^2. \end{aligned}$$
La proposition $H(n + 1)$ est vraie et donc $H(n)$ vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$, puisque $P_{n+1}^2 - P_nP_{n+2} = 1$ le théorème de Bézout implique que P_n et P_{n+1} sont premiers entre eux.
3. Soit $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 1$. Pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ on note $A(n)$ la propriété : $P_{m+n} = P_nP_{m+1} - P_{n-1}P_m$.
On a $P_{m+1} = 1P_{m+1} - 0 \cdot P_m$, donc $A(1)$ est vraie. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$. On suppose $A(k)$ vraie pour tout $1 \leq k \leq n$. On calcule
$$\begin{aligned} P_{n+1}P_{m+1} - P_nP_m &= (XP_n - P_{n-1})P_{m+1} - P_nP_m \\ &= X(P_{m+n} + P_{n-1}P_m) - P_{n-1}P_{m+1} - P_nP_m \\ &= XP_{m+n} + XP_{n-1}P_m - (P_{m+n-1} + P_{n-2}P_m) - P_nP_m \\ &= XP_{m+n} - P_{m+n-1} + (XP_{n-1} - P_{n-2})P_m - P_nP_m \\ &= XP_{m+n} - P_{m+n-1} = P_{m+n+1}. \end{aligned}$$
La propriété $A(n + 1)$ est vraie et donc $A(n)$ est vraie pour tout $n \geq 1$.
4. Notons $Q = \text{PGCD}(P_n, P_m)$ et $T = \text{PGCD}(P_{m+n}, P_n)$. D'après (3), $Q \mid P_{m+n}$ et donc Q divise T. D'autre part, puisque $T \mid P_{m+n}$ et $T \mid P_n$, encore par (3), $Q \mid P_{n-1}P_m$. Mais P_n et P_{n+1} sont premiers entre eux, donc T est premier avec P_{n-1} et alors par le lemme de Gauss $T \mid P_m$. On en déduit $T \mid Q$ et donc $T = Q$.
5. On déduit facilement de (4) que pour $k, d \in \mathbb{N}^*$, $(P_{m+nk}, P_n) = (P_m, P_n)$ et $(P_{dn}, P_n) = P_n$. On calcule le pgcd(m, n) via l'algorithme d'Euclide :
$$\begin{aligned} m &= nq_1 + r_1 \\ n &= r_1q_2 + r_2 \\ &\vdots \\ r_{k-1} &= r_kq_{k+1} + 0, \end{aligned}$$

où r_k est le dernier reste non nul (donc pgcd$(m, n) = r_k$.) On a donc
$$\text{pgcd}(P_m, P_n) = \text{pgcd}(P_{nq_1+r_1}, P_n) = \text{pgcd}(P_{r_1}, P_n) = \text{pgcd}(P_{r_1}, P_{r_2}) = \ldots = \text{pgcd}(P_{r_k}, P_{q_{k+1}r_k}) = P_{r_k}.$$

Exercice 9-104
Pour quelles valeurs de l'entier $n \geq 1$ le polynôme $P_n = X^{2n} + X^n + 1$ est-il divisible dans $\mathbb{R}[X]$ par $X^2 + X + 1$?

CORRECTION
Vu que $X^3 - 1 = (X-1)(X^2+X+1)$, on a que les racines complexes de X^2+X+1 sont $j = e^{i2\pi/3}$ et $\bar{j}$. Par un théorème du cours, il suffit de vérifier que j est racine aussi de P_n. Après avoir remarqué que

$$j^3 = \bar{j}^3 = 1\,, \qquad j^2 = -j-1 \qquad \text{et aussi} \qquad j^2 = \bar{j}\,,$$

on a que $P_n(j) = \bar{j}^n + j^n + 1$.

Trois cas sont alors possibles.

1. $n \equiv 0\ [3]$: on a alors que $j^n = \bar{j}^n = 1$, et donc $P_n(j) = 3$. Alors X^2+X+1 ne divise pas P_n.
2. $n \equiv 1\ [3]$: on a alors que $j^n = j$ et $\bar{j}^n = \bar{j}$, d'où on trouve
$$P_n(j) = \bar{j} + j + 1 = 0\,.$$
Dans ce cas, X^2+X+1 divise P_n.
3. $n \equiv 2\ [3]$: on a alors que $j^n = j^2 = \bar{j}$ et $\bar{j}^n = \bar{j}^2 = j$; on en déduit (comme dans le cas précédent) que X^2+X+1 divise P_n.

Exercice 9-105
Soient $m \geq 1$ et $n \geq 1$ deux entiers. Calculer le PGCD des polynômes $X^m - 1$ et $X^n - 1$.

CORRECTION
On applique l'algorithme d'Euclide. On suppose par exemple $n > m$, et on écrit $n = mq + r$, avec $0 \leq r < m$. Alors on a :

$$X^n - 1 = X^{mp+r} - 1 = X^r(X^{mp} - 1) + X^r - 1.$$

Le point crucial est que $X^{mp} - 1$ est divisible par $X^m - 1$. En effet, $X^{mp} - 1 = (X^m - 1)(X^{m(p-1)} + X^{m((p-1)-1)} + \cdots + X^m + 1)$. Ainsi, $\text{pgcd}(X^n - 1, X^m - 1) = \text{pgcd}(X^m - 1, X^r - 1)$. Mais puisque $\text{pgcd}(n, m) = \text{pgcd}(m, r)$, on en déduit finalement que $\text{pgcd}(X^n - 1, X^m - 1) = X^{\text{pgcd}(n,m)} - 1$.

Exercice 9-106
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer la formule

$$\prod_{k=0}^{n-1} (X^2 - 2X\cos(2k\pi/n) + 1) = (X^n - 1)^2.$$

CORRECTION
On note que, pour tout k fixé entre 0 et $n-1$, on a

$$2\cos(2k\pi/n) = 2\Re\left(e^{i2k\pi/n}\right) = e^{i2k\pi/n} + e^{-i2k\pi/n} \qquad \text{et} \qquad 1 = e^{i2k\pi/n}\, e^{-i2k\pi/n}\,.$$

Donc on peut décomposer

$$X^2 - 2X\cos(2k\pi/n) + 1 = \left(X - e^{i2k\pi/n}\right)\left(X - e^{-i2k\pi/n}\right)\,.$$

En d'autres termes, pour chaque k fixé, le terme $X^2 - 2X\cos(2k\pi/n) + 1$ s'écrit comme le produit entre une racine n-ième de l'unité et son complexe conjugué. Mais son complexe conjugué est aussi une racine n-ième de l'unité, et en faisant varier k on prend toutes les racines. On en déduit que

$$\begin{aligned}
\prod_{k=0}^{n-1} (X^2 - 2X\cos(2k\pi/n) + 1) &= \prod_{k=0}^{n-1} \left(X - e^{i2k\pi/n}\right)\left(X - e^{-i2k\pi/n}\right) \\
&= \prod_{k=0}^{n-1} \left(X - e^{i2k\pi/n}\right) \prod_{k=0}^{n-1} \left(X - e^{-i2k\pi/n}\right) \\
&= \left(\prod_{k=0}^{n-1} \left(X - e^{i2k\pi/n}\right)\right)^2 = (X^n - 1)^2\,.
\end{aligned}$$

Exercice 9-107
Pour $n \geq 1$, on note $P_n = (1+iX)^n - (1-iX)^n$ pour $n \geq 1$. Factoriser le polynôme P_n et en déduire les valeurs de $\sum_{k=0}^{p} \tan^2(\frac{k\pi}{2p+1})$ et de $\sum_{k=0}^{p-1} \tan^2(\frac{k\pi}{2p})$. On regroupera les termes dont les racines sont opposées.

CORRECTION
Soit $n \geq 1$ un entier. On note $p \geq 0$ l'unique entier tel que

$$n = \begin{cases} 2p+1 & \text{si } n \text{ est impair} \\ 2p+2 & \text{sinon} \end{cases}$$

On remarque facilement que $\deg(P_n) = 2p+1$. En effet,

$$\begin{aligned} P_n &= (1+iX)^n - (1-iX)^n \\ &= \sum_{\ell=0}^{n} \binom{n}{\ell} \left(i^\ell - (-i)^\ell\right) X^\ell \\ &= \sum_{k=0}^{p} \binom{n}{2k+1} \left(i^{2k+1} - (-i)^{2k+1}\right) X^{2k+1} \\ &= 2i \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{n}{2k+1} X^{2k+1} \qquad (1) \end{aligned}$$

Comme $P(-i) \neq 0$, z est une racine de P si et seulement si $\frac{1+iz}{1-iz}$ est une racine n-ième de l'unité différente de -1. On a donc

$$\begin{aligned} P(z) = 0 &\iff \exists k \in \{-p, \ldots, 0, \ldots, p\} \mid \frac{1+iz}{1-iz} = e^{i\frac{2k\pi}{n}} \\ &\iff \exists k \in \{-p, \ldots, 0, \ldots, p\} \mid z = \frac{e^{i\frac{2k\pi}{n}} - 1}{i\left(e^{i\frac{2k\pi}{n}} + 1\right)} = \frac{\left(e^{i\frac{k\pi}{n}} - e^{-i\frac{k\pi}{n}}\right)}{i\left(e^{i\frac{k\pi}{n}} + e^{-i\frac{k\pi}{n}}\right)} \frac{e^{i\frac{k\pi}{n}}}{e^{i\frac{k\pi}{n}}} \\ &\iff \exists k \in \{-p, \ldots, 0, \ldots, p\} \mid z = \tan\left(\frac{k\pi}{n}\right) \qquad (2) \end{aligned}$$

De (1) et (2), on déduit que

$$\begin{aligned} P_n(X) &= 2i(-1)^p \binom{n}{2p+1} \prod_{k=-p}^{p} \left(X - \tan\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right) \\ &= 2i(-1)^p \binom{n}{2p+1} X \prod_{k=1}^{p} \left(X - \tan\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right)\left(X - \tan\left(\frac{-k\pi}{n}\right)\right) \\ &= 2i(-1)^p \binom{n}{2p+1} X \prod_{k=1}^{p} \left(X^2 - \tan^2\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right) \qquad (3) \end{aligned}$$

On obtient alors le résultat demandé en identifiant les monônes de degré $(2p-1)$ dans (1) et (3) :

$$2i(-1)^{p-1}\binom{n}{2(p-1)+1} X^{2(p-1)+1} = 2i(-1)^p \binom{n}{2p+1} X \sum_{k=1}^{p} \left(-\tan^2\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right) X^{2(p-1)}.$$

Ce qui est équivalent à

$$\sum_{k=1}^{p} \tan^2\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \frac{\binom{n}{2p-1}}{\binom{n}{2p+1}} = \begin{cases} p(2p+1) & \text{si } n = 2p+1 \\ \dfrac{p(2p+1)}{3} & \text{si } n = 2p+2. \end{cases}$$

Exercice 9-108
Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i X^i$ et $a_i = a_{n-i}, \forall i \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que si $z \in \mathbb{C}^*$ est racine alors $\frac{1}{z}$ est racine.
2. Factoriser $6X^4 - 35X^3 + 62X^2 - 35X + 6$.

CORRECTION

1. On calcule
$$P(1/z) \;=\; \sum_{i=0}^{n} a_i (1/z)^i \;=\; \sum_{i=0}^{n} a_i \frac{1}{z^i} \;=\; \frac{1}{z^n} \sum_{i=0}^{n} a_i z^{n-i}\,,$$
où on a calculé le dénominateur en commun. Maintenant, par hypothèse de symmétrie sur les coefficients, on peut écrire
$$\sum_{i=0}^{n} a_i z^{n-i} \;=\; \sum_{i=0}^{n} a_{n-i} z^{n-i} \;=\; \sum_{i=0}^{n} a_i z^i \;=\; P(z)\,.$$
Donc on a trouvé que $P(1/z) \;=\; P(z)/z^n$. Du moment que z est racine, $P(z) = 0$, et alors aussi $P(1/z) = 0$.
2. On cherche une racine non-triviale ($\neq 0, \pm 1$) pour pouvoir appliquer le résultat précédent. On voit tout de suite que 2 est racine du polynôme. On sait alors que aussi $1/2$ l'est. Autrement dit, $X - 2$ et $2X - 1$ divisent le polynôme donné. Par division euclidienne, on a
$$6X^4 - 35X^3 + 62X^2 - 35X + 6 \;=\; (X-2)\,(2X-1)\,(3X^2 - 10X + 3)\,.$$
Maintenant, le polynôme $3X^2 - 10X + 3$ vérifie l'hypothèse de symmétrie précédente. C'est facile à voir que 3 est une racine, et donc aussi $1/3$. On en déduit que $3X^2 - 10X + 3 \;=\; (X-3)\,(3X-1)$ (la vérification est immédiate). Finalement, on trouve
$$6X^4 - 35X^3 + 62X^2 - 35X + 6 \;=\; (X-2)\,(2X-1)\,(X-3)\,(3X-1)\,.$$

Exercice 9-109
Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrer que $P(X+1) = \displaystyle\sum_{n=0}^{deg(P)} \frac{P^{(n)}(X)}{n!}$.

CORRECTION
On écrit $P(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \ldots + a_dX^d$. Alors
$$\begin{aligned} P(X+1) =& (a_0 + a_1X + a_2X^2 + \ldots + a_dX^d) + \\ & a_1 + 2a_2X + 3a_3X^2 + \ldots + da_dX^{d-1} + \\ & a_2 + 3a_3X + \ldots + \binom{d}{2} a_dX^{d-2} + \\ & \vdots \\ & a_{d-1} + da_dX + \\ & a_d. \end{aligned}$$
Donc $P(X+1) = P(X) + P'(X) + \dfrac{P^{(2)}(X)}{2} + \ldots + \dfrac{P^{(d)}(X)}{d}$.

Exercice 9-110
Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ non nul et d son degré. Pour n entier naturel, on définit u_n commme étant la somme (avec multiplicité) des racines de $P^{(n)}$. Montrer que $(u_n)_{0 \leq n \leq d}$ est une suite arithmétique.

CORRECTION
Soit $P(X) = X^d + a_1 X^{d-1} + \dots$. Par les rélations coefficients- racines, on sais que $u_0 = a_1$. De façon analogue, $P'(X)\, dX^{d-1} + a_1(d-1)X^{d-2} + \dots$, d'où on a $u_1 = a_1\,(d-1)/d$. De la dérivée seconde, on trouve $u_2 = a_1\,(d-2)/d$. En général, pour tout $k \in [0, d]$, on a

$$u_k \;=\; a_1\,\frac{d-k}{d}\,.$$

Donc, on calcule

$$u_{k-1} - u_k \;=\; a_1\,\frac{d-k+1}{d} \;-\; a_1\,\frac{d-k}{d} \;=\; \frac{a_1}{d}\,(d-k+1-d+k) \;=\; \frac{a_1}{d}\,,$$

qui est constant en k.

Exercice 9-111
Soit $P = X^4 + 12X - 5$. Décomposer ce polynôme en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$, en sachant qu'il admet deux racines complexes dont la somme vaut 2.

CORRECTION
Notons $a, b \in \mathbb{R}$ les deux racines dont la somme vaut 2. Alors il existe $c, d \in \mathbb{R}$ tels que $P = (X-a)(X-b)(X^2+cX+d) = (X^2-2X+ab)(X^2+cX+d)$. On développant et en identifiant les coefficients on trouve $c = 2$, $d = 4 - ab$ et $2ab - 2d = 12$. On en déduit $ab = 5$ et $d = -1$. On a finalement

$$P = (X^2-2X+5)(X^2+2X-1) = (X^2-2X+5)(X+1-\sqrt{2})(X+1+\sqrt{2}).$$

Exercice 9-112
Cet exercice a pour objet la détermination de tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ qui satisfont à l'identité $(*)$:

$$(X+3)P(X) = XP(X+1).$$

1. Soit P un polynôme vérifiant $(*)$. Montrer qu'il existe un polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P = XQ$.
2. Déterminer $Q(-1)$ puis $Q(-2)$.
3. En déduire que P est nécessairement de la forme $aX^m(X+1)^n(X+2)^p$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $m,\ n,\ p \in \mathbb{N}^*$.
4. Démontrer finalement que P vérifie $(*)$ si et seulement s'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $P = aX(X+1)(X+2)$.

CORRECTION
1. De $(*)$, on trouve tout de suite que $3P(0) = 0$, donc 0 est une racine de P, et alors $P(X) = X\,Q(X)$, pour un certain polynôme Q.
2. La rélation $(*)$ devient alors $(**)$:

   $$(X+3)\,X\,Q(X) \;=\; X\,(X+1)\,Q(X+1)\,.$$

   Le polynôme à droite s'annulle si calculé en -1, d'où $Q(-1) = 0$ (parce que le membre de gauche aussi doit s'annuler). En utilisant cette dernière propriété, le membre de droite s'annulle aussi si calculé en -2, d'où $Q(-2) = 0$ (parce que le membre de gauche aussi doit s'annuler).
3. De la question précédente, on déduit que $X+1$ et $X+2$ divisent Q, et donc aussi P. On peut alors écrire

   $$P(X) \;=\; a\,X^m\,(X+1)^n\,(X+2)^p\,R(X)\,,$$

   avec $a \in \mathbb{R}$ et $m,\ n,\ p \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ et $R \in \mathbb{R}[X]$ unitaire. Aussi, on peut supposer que X, $X+1$ et $X+2$ ne divisent pas R. La rélation $(*)$ devient alors

   $$(X+3)\,a\,X^m\,(X+1)^n\,(X+2)^p\,R(X) \;=\; X\,a\,(X+1)^m\,(X+2)^n\,(X+3)^p\,R(X+1) \qquad (4)$$

   L'égalité précédente implique déjà que $m = 1$ (à cause des puissances de X), et alors $n = 1$ (puissances de $X+1$) et $p = 1$ (puissances de $X+2$). Cela implique que $X+3$ ne divise pas R, autrement dit que -3 n'est pas racine de R, et donc de P non plus.

Il nous reste à prouver que $R(X) = 1$.
Maintenant, si $\alpha \in \mathbb{C}$, $\alpha \neq 0, -1, -2, -3$ est une autre racine de P, donc α est une racine de R. De l'égalité précédente, calculée en α, on trouve alors

$$0 \;=\; \alpha\, a\, (\alpha+1)^m\, (\alpha+2)^n\, (\alpha+3)^p\, R(\alpha+1)\,.$$

Cela implique $R(\alpha+1) = 0$, et donc $\alpha+1$ est une autre racine de R. Cela implique que $\alpha \neq -4$; en itérant (il faudrait faire une récurrence), on trouve que $\alpha \neq -k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. D'autre côté, le même argument montre que $\alpha + k$ est une racine de R, pour tout $k \in \mathbb{N}$. R aurait donc une infinité de racine, et le théorème fondamental de l'algèbre impliquerait que $R \equiv 0$, d'où $P \equiv 0$: absurde. L'absurde vient de supposer que R admettait une racine $\alpha \in \mathbb{C}$ différente de celles qu'on a déjà trouvées, et alors la seule possibilité est que $R \equiv 1$ (on avait choisi R unitaire).

4. On a prouvé que, forcement, il faut avoir $P(X) \;=\; a\, X\, (X+1)\, (X+2)$. D'autre côté, si P est de la forme précédente, P vérifie $(*)$. La preuve est alors complète.

Exercice 9-113
Soit $P(X) = X^3 + aX^2 + bX + c$ un polynôme complexe de racines α, β, γ. Calculer :

$$\frac{\alpha}{\beta+\gamma} + \frac{\beta}{\alpha+\gamma} + \frac{\gamma}{\beta+\alpha}\ .$$

CORRECTION
Puisque $X^3 + aX^2 + bX + c = (X-\alpha)(X-\beta)(X-\gamma)$ on en déduit $\beta\gamma + \gamma\alpha + \alpha\beta = b$, $-(\alpha+\beta+\gamma) = a$ et $\alpha\beta\gamma = c$. De ces trois identités on peut aussi en déduire $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = a^2 - 2b$. Finalement en mettant sur le même dénominateur l'expression $S = \frac{\alpha}{\beta+\gamma} + \frac{\beta}{\alpha+\gamma} + \frac{\gamma}{\beta+\alpha}$ et faisant apparaître les termes identifiés ci-dessus on trouve

$$S = \frac{a(a^2-2b)+3c}{ab+c}$$