Feuille 9 : Polynômes

Exercice 9-1
Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $P_n = (1+X)(1+X^2)(1+X^4)...(1+X^{2^n})$. Calculer les coefficients de P_n.
Exercice 9-2
Déterminer tous les polynômes P de $\mathbb{R}[X]$ vérifiant les relations suivantes :
1. $P(X^2+1) = P(X)$ 2. $P(2X+1) = P(X)$
Exercice 9-3
Pour a, b réels, on note $P_{a,b} = X^4 + 2aX^3 + bX^2 + 2X + 1$. Pour quelles valeurs de a et b le polynôme $P_{a,b}$ est-il le carré d'un polynôme de $\mathbb{R}[X]$?
Exercice 9-4
On considère l'équation suivante dans $\mathbb{C}[X]$: $P(2X) = P'(X)P''(X)$.

1. On note P une solution non nulle de cette équation, δ son degré et a son coefficient dominant.
   a) Quel est le degré de $P(2X)$? De $P'P''$? En déduire la valeur de δ.
   b) Quel est le coefficient dominant de $P(2X)$? De $P'P''$? En déduire la valeur de a.
   c) Déterminer P.
2. Conclure.

Exercice 9-5
Quelles sont les racines (dans $\mathbb{C}$ et dans $\mathbb{R}$) des polynômes suivants ?

1. $X^3 - 7X^2 + 14X - 8$ 2. $X^6 - 4$ 3. $X^4 - 13X^2 + 36$ 4. $X^4 + 6X^2 + 25$.

Exercice 9-6

1. Soit $m \geq 1$ un entier. Quelles sont les racines (dans $\mathbb{C}$ et dans $\mathbb{R}$) du polynôme $X^m - 1$?
2. Soit $n \geq 1$ un entier. Quelles sont les racines (dans $\mathbb{C}$ et dans $\mathbb{R}$) du polynôme $X^n + X^{n-1} + \ldots + X + 1$?

Exercice 9-7
Montrer que le polynôme $X^{163} + 24X^{57} - 6$ a au moins une racine sur $\mathbb{R}$.
Exercice 9-8
Deux polynômes U et V réels vérifient $U(x)\sin(x) + V(x)\cos(x) = 0$ pour tout $x > 0$. Montrez que U et V sont tous deux égaux au polynôme nul.
Exercice 9-9
On définit une suite de polynômes $P_0 = 2$, $P_1 = X$ et $P_{n+2} = XP_{n+1} - P_n$.

1. Déterminer le degré et le coefficient dominant de P_n.
2. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, $P_n(z + \frac{1}{z}) = z^n + \frac{1}{z^n}$.
3. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Calculer $P_n(2\cos\theta)$.
4. Donner les racines de P_n.

Exercice 9-10

1. Soient P_1, P_2 et Q trois polynômes. Montrer que $P_1 - P_2$ divise $Q(P_1) - Q(P_2)$.
2. Soit P un polynôme. Montrer que $P(X) - X$ divise $P(P(X)) - X$.

Exercice 9-11
Pour chacun des polynômes suivants, dresser la liste complète des polynômes le divisant dans l'anneau de polynômes précisé :
1. $X + 1$ dans $\mathbb{R}[X]$ 2. $X^2 - 1$ dans $\mathbb{R}[X]$ 3. $X^2 + 1$ dans $\mathbb{C}[X]$ 4. $X^2 + 1$ dans $\mathbb{R}[X]$

Exercice 9-12 Soit $n \geq 1$ un entier.

1. Déterminer le reste de la division euclidienne de X^{5n} par $X^5 - 1$.
2. En déduire le reste de la division euclidienne de $X^{99} + 2X^{42} - 3X^{35} - 2X^{27} + 3$ par $X^5 - 1$.

Exercice 9-13
Soit P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$. On note R le reste de sa division euclidienne par $X - 7$. Montrer que $R = P(7)$.
Exercice 9-14
Soient a un nombre réel et $n \geq 1$ un entier. On pose $A = (X \sin a + \cos a)^n$.
Déterminer le reste de la division euclidienne de A par $X^2 + 1$.

Exercice 9-15
Effectuer les divisions euclidiennes dans $\mathbb{R}[X]$ de
1. $3X^5 + 4X^2 + 1$ par $X^2 + 2X + 3$.
2. $3X^5 + 2X^4 - X^2 + 1$ par $X^3 + X + 2$.

Exercice 9-16
Soit $P(X) = X^4 - 5X^3 + 8X^2 - 10X + 12$ et $Q(X) = X^4 + X^2 - 2$. Déterminer le PGCD de P et Q puis déterminer deux polynômes U et V tels que $PU + QV = \text{PGCD}(P, Q)$.
Exercice 9-17
Factoriser les polynômes suivants en polynômes irréductibles :
1. $X^n + X^{n-1} + \cdots X + 1$ dans $\mathbb{C}[X]$
2. $X^{11} + 2^{11}$ dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$
3. $X^4 + 4$ dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$
4. $X^4 - j$ dans $\mathbb{C}[X]$, où $j = \exp(2i\pi/3)$
5. $X^8 + X^4 + 1$ dans $\mathbb{R}[X]$
6. $X^5 - 1$ dans $\mathbb{R}[X]$

Exercice 9-18
Calculer le pgcd des couples de polynômes (P, Q) suivants :

1. $P = 6(X-1)^2(X+2)^3(X^2+1)^4$ et $Q = 15(X-1)(X+7)^3(X^2+1)$,
2. $P = X^7 + 2X^6 - X - 2$ et $Q = X^3 + X^2 - 2X$,
3. $P = nX^{n+1} - (n+1)X^n + 1$ et $Q = X(X-1)^2(X-2)$,
4. $P = X^5 - X^4 + X^3 - X^2 + X - 1$ et $Q = X^7 + X^5 + 8X^4 + X^3 + 8X^2 + 8$.

Exercice 9-19
Soit P le polynôme réel : $P = X^6 + 4X^5 + 8X^4 + 10X^3 + \alpha X^2 + 4X + 1$. On suppose que -1 est une racine de P.

1. Déterminer α.
2. Montrer que -1 est une racine double de P.
3. Montrer que j est une racine multiple de P.
4. Factoriser P, d'abord dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 9-20
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on considère le polynôme à coefficients réels $P = aX^{n+1} + bX^n + c$. Peut-on choisir a, b, c pour que P admette 1 comme racine multiple ? Quel est alors l'ordre de cette racine ?
Exercice 9-21
Pour tout complexe a, on pose $P_a = 2X^3 + 3X^2 + 6X + a \in \mathbb{C}[X]$.

1. Calculer le PGCD de P_a et P'_a.
2. Pour quelles valeurs de a le polynôme P_a admet-il une racine double ? Pour chacune de ces valeurs, décomposer P_a en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$.

Exercice 9-22
On considère l'équation suivante dans $\mathbb{R}[X]$: $(P')^2 = 4P$.

1. Déterminer toutes les solutions constantes de l'équation.
2. Soit P une solution non constante. Déterminer le degré de P, puis montrer que P possède au moins une racine multiple.
3. Conclure.

Exercice 9-23
Soient α, β, γ les racines de l'équation $X^3 - 5X^2 + 6X - 1$. Déterminer la valeur exacte de

$$\frac{1}{1-\alpha} + \frac{1}{1-\beta} + \frac{1}{1-\gamma} \ .$$

Exercice 9-24
Soit $P = X^3 + 3X^2 + 2X + i \in \mathbb{C}[X]$.

1. Prouver que P n'a pas de racine réelle.
2. Soient α, β et γ les trois racines complexes de P. Calculer $\alpha + \beta + \gamma$, $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$ et $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3$.

Exercice 9-101
Soient P et Q deux polynômes de $\mathbb{R}[X]$. On suppose que Q divise P. Montrer que Q^2 divise $PQ' - P'Q$.

Exercice 9-102
Soit a et b deux réels distincts et P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$. On note λ et μ les restes respectifs de la division euclidienne de P par $X - a$ et par $X - b$.

1. Exprimer à l'aide de λ et μ le reste de la division euclidienne de P par $(X - a)(X - b)$.
2. Qu'a-t-on montré dans le cas particulier où $\lambda = \mu = 0$?

Exercice 9-103
On définit une suite de polynômes $P_0 = 0$, $P_1 = 1$ et $P_{n+2} = XP_{n+1} - P_n$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, P_{n+1}^2 = 1 + P_n P_{n+2}$.
2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}, P_n$ et P_{n+1} sont premiers entre eux.
3. Etablir que pour tout $(m, n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$, on a :
$$P_{m+n} = P_n P_{m+1} - P_{n-1} P_m \ .$$
4. Monter que $(m, n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$, on a :
$$Pgcd(P_{m+n}, P_n) = Pgcd(P_m, P_n) \ .$$
5. Conclure que $Pgcd(P_m, P_n) = P_{Pgcd(m,n)}$.

Exercice 9-104
Pour quelles valeurs de l'entier $n \geq 1$ le polynôme $P_n = X^{2n} + X^n + 1$ est-il divisible dans $\mathbb{R}[X]$ par $X^2 + X + 1$?

Exercice 9-105
Soient $m \geq 1$ et $n \geq 1$ deux entiers. Calculer le PGCD des polynômes $X^m - 1$ et $X^n - 1$.

Exercice 9-106
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer la formule

$$\prod_{k=0}^{n-1} (X^2 - 2X\cos(2k\pi/n) + 1) = (X^n - 1)^2.$$

Exercice 9-107
Pour $n \geq 1$, on note $P_n = (1 + iX)^n - (1 - iX)^n$ pour $n \geq 1$. Factoriser le polynôme P_n et en déduire les valeurs de $\sum\limits_{k=0}^{p} \tan^2(\frac{k\pi}{2p+1})$ et de $\sum\limits_{k=0}^{p-1} \tan^2(\frac{k\pi}{2p})$. On regroupera les termes dont les racines sont opposées.

Exercice 9-108
Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i X^i$ et $a_i = a_{n-i}, \forall i \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que si $z \in \mathbb{C}^*$ est racine alors $\frac{1}{z}$ est racine.
2. Factoriser $6X^4 - 35X^3 + 62X^2 - 35X + 6$.

Exercice 9-109

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrer que $P(X+1) = \sum_{n=0}^{deg(P)} \frac{P^{(n)}(X)}{n!}$.

Exercice 9-110

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ non nul et d son degré. Pour n entier naturel, on définit u_n commme étant la somme (avec multiplicité) des racines de $P^{(n)}$. Montrer que $(u_n)_{0 \leq n \leq d}$ est une suite arithmétique.

Exercice 9-111

Soit $P = X^4 + 12X - 5$. Décomposer ce polynôme en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$, en sachant qu'il admet deux racines dont la somme vaut 2.

Exercice 9-112

Cet exercice a pour objet la détermination de tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ qui satisfont à l'identité $(*)$:

$$(X+3)P(X) = XP(X+1).$$

1. Soit P un polynôme vérifiant $(*)$. Montrer qu'il existe un polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P = XQ$.
2. Déterminer $Q(-1)$ puis $Q(-2)$.
3. En déduire que P est nécessairement de la forme $aX^m(X+1)^n(X+2)^p$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $m,\ n,\ p \in \mathbb{N}^*$.
4. Démontrer finalement que P vérifie $(*)$ si et seulement s'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $P = aX(X+1)(X+2)$.

Exercice 9-113

Soit $P(X) = X^3 + aX^2 + bX + c$ un polynôme complexe de racines α, β, γ. Calculer :

$$\frac{\alpha}{\beta+\gamma} + \frac{\beta}{\alpha+\gamma} + \frac{\gamma}{\beta+\alpha}\ .$$