Correction Feuille 1 : Calculs algébriques

Exercice 1-1

Soit x et y des réels ; en supposant qu'elle est bien définie, fournir une forme plus simple de chacune des expressions suivantes :

1) $(125)^{-2/3}$ 2) $(-5x)^3$ 3) $\left(\frac{x^{-2}}{y^{-2}}\right)\left(\frac{x}{y}\right)^2$ 4) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{27}}$

5) $-2\sqrt{9y}+10\sqrt{y}$ 6) $\left[\left(x^2y^{-2}\right)^{-1}\right]^{-1}$ 7) $5^{-1/2}\cdot 5x^{11/6}\cdot(5x)^{-3/2}$ 8) $\dfrac{\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}}{\frac{y}{x}}$

9) $\dfrac{y}{5x-y}+\dfrac{5x}{y-5x}+1$ 10) $\dfrac{\frac{2}{x^2-1}+\frac{3}{x-1}}{3x+5}$ 11) $\dfrac{x+x^2+x^3+x^4}{x^{-1}+x^{-2}+x^{-3}+x^{-4}}$ 12) $\dfrac{1+x^5}{x^{-2}-x^{-3}+x^{-4}-x^{-5}+x^{-6}}$

Correction exercice 1-1

1. $\sqrt[3]{125}=5$, d'où $(125)^{-2/3}=1/25$.
2. $(-5x)^3=(-1)^3\,5^3\,x^3 \;=\; -125x$.
3. Pour tout $\alpha\in\mathbb{R}$, on a
$$\frac{x^\alpha}{y^\alpha}\;=\;\left(\frac{x}{y}\right)^\alpha\;;$$
on en déduit que
$$\frac{x^{-2}}{y^{-2}}\left(\frac{x}{y}\right)^2\;=\;1\,.$$
4. On a $\sqrt[3]{\sqrt[4]{27}}\;=\;\left(27^{1/4}\right)^{1/3}\;=\;27^{(1/4)\cdot(1/3)}\;=\;\left(27^{1/3}\right)^{1/4}\;=\;3^{1/4}\;=\;\sqrt[4]{3}$.
5. $\sqrt{9y}\;=\;\sqrt{9}\,\sqrt{y}$; donc, on peut factoriser par $2\sqrt{y}$ et on trouve
$$-2\sqrt{9y}+10\sqrt{y}\;=\;2\sqrt{y}\,\left(10-\sqrt{9}\right)\;=\;14\,\sqrt{y}\,.$$
6. $\left[\left(x^2y^{-2}\right)^{-1}\right]^{-1}\;=\;\left(x^2y^{-2}\right)^{(-1\cdot(-1))}\;=\;x^2/y^2$.
7. On a
$$5^{-1/2}\cdot 5x^{11/6}\cdot(5x)^{-3/2}\;=\;5^{-1/2+1-3/2}\,x^{11/6-3/2}\;=\;5^{-1}\,x^{1/3}\;=\;\frac{\sqrt[3]{x}}{5}\,.$$
8. On a
$$\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}\;=\;\frac{x-(x+1)}{(x+1)\,x}\;=\;\frac{-1}{(x+1)\,x}$$
$$\frac{1}{y/x}\;=\;\frac{x}{y}\,,$$
d'où on trouve $\dfrac{\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}}{\frac{y}{x}}\;=\;\dfrac{-1}{(x+1)\,y}$.
9. On a
$$\frac{y}{5x-y}+\frac{5x}{y-5x}+1\;=\;\frac{y}{5x-y}-\frac{5x}{5x-y}+1\;=\;\frac{y-5x}{5x-y}+1\;=\;0\,.$$
10. En utilisant le fait que $x^2-1=(x-1)(x+1)$, le même calcul de l'expression 8 montre que le numérateur est égal à $\dfrac{3x+5}{x^2-1}$, et donc
$$\frac{\frac{2}{x^2-1}+\frac{3}{x-1}}{3x+5}\;=\;\frac{1}{x^2-1}\,.$$

11. On écrit le dénominateur de la façon suivante :
$$x^{-1}+x^{-2}+x^{-3}+x^{-4} \;=\; \frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^4} \;=\; \frac{x^3+x^2+x+1}{x^4}\,.$$
En factorisant le numérateur par x, on trouve alors
$$\frac{x+x^2+x^3+x^4}{x^{-1}+x^{-2}+x^{-3}+x^{-4}} \;=\; \frac{x(x^3+x^2+x+1)}{\frac{x^3+x^2+x+1}{x^4}} \;=\; x^5\,.$$

12. On observe que
$$x^5+1 \;=\; x^5-(-1) \;=\; (x+1)\,(x^4-x^3+x^2-x+1)\,.$$
D'autre côté, en raisonnant comme au point 11, le dénominateur s'écrit comme
$$x^{-2}-x^{-3}+x^{-4}-x^{-5}+x^{-6} \;=\; \frac{x^4-x^3+x^2-x+1}{x^6}\,,$$
d'où on peut déduire que
$$\frac{1+x^5}{x^{-2}-x^{-3}+x^{-4}-x^{-5}+x^{-6}} \;=\; x^6\,.$$

<u>**Exercice 1-2**</u> Soit a, b, c et d des réels. Développer $(a+b+c+d)^2$ puis $(a+b+c)^3$.

<u>**Correction exercice 1-2**</u>
C'est un calcul.
$$\begin{aligned}(a+b+c+d)^2 \;&=\; a^2+b^2+c^2+d^2+2ab+2ac+2ad+2bc+2bd+2cd\\ (a+b+c)^3 \;&=\; (a+b+c)^2\,(a+b+c) \;=\; (a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc)\,(a+b+c)\\ &=\; a^3+b^3+c^3+3a^2b+3a^2c+3ab^2+3ac^2+3b^2c+3bc^2+6abc\,.\end{aligned}$$

<u>**Exercice 1-3**</u> Soit x et y deux réels. On suppose que $x-y=1$. Calculer $x^3-3xy-y^3$.

<u>**Correction exercice 1-3**</u> On observe que $x^3-y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2)$. En utilisant l'hypothèse $x-y=1$, on trouve donc
$$x^3-3xy-y^3 \;=\; x^2+xy+y^2-3xy \;=\; (x-y)^2 \;=\; 1\,.$$

<u>**Exercice 1-4**</u>

1. Rappeler la preuve, faite en cours, de la propriété suivante : pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a
$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=1-\frac{1}{n+1}.$$
2. Expliciter deux réels a et b tels que pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, on a $\dfrac{2}{k(k+2)}=\dfrac{a}{k}+\dfrac{b}{k+2}$.
3. En déduire que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $2\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+2)}=\frac{3}{2}-\frac{2n+3}{(n+1)(n+2)}$.
4. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)=\frac{2^{n+1}}{(n+2)(n+1)(n!)^2}$.

<u>**Correction exercice 1-4**</u>

1. Fait en cours.

2. En calculant le dénominateur en commun, on a

$$\frac{a}{k} + \frac{b}{k+2} = \frac{a(k+2)+bk}{k(k+2)} = \frac{(a+b)k+2a}{k(k+2)},$$

qui implique que $a = 1$ et $b = -a = -1$.

3. En utilisant le résultat précédent, on peut écrire

$$\begin{aligned}
2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+2)} &= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2}\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+2} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=3}^{n+2} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \\
&= \frac{3}{2} - \frac{2n+3}{(n+1)(n+2)}.
\end{aligned}$$

4. On utilise encore le résultat du point 2 pour écrire

$$\prod_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2}\right) = \prod_{k=1}^{n} \frac{2}{k(k+2)} = 2^n \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \cdot \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+2)}.$$

Bien sûr, on a $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1/n!$. D'autre côté, on a aussi

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+2)} = \prod_{k=3}^{n+2} \frac{1}{k} = 2\left(\prod_{k=3}^{n} \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1\right) \frac{1}{n+1} \frac{1}{n+2} = 2\left(\prod_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) \frac{1}{n+1} \frac{1}{n+2}.$$

En mettant tout ensemble, on trouve

$$\prod_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2}\right) = 2^{n+1} \frac{1}{(n!)^2} \frac{1}{n+1} \frac{1}{n+2}.$$

Exercice 1-5

1. Donner deux différentes preuves de la formule du cours suivante : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

   a) En effectuant une démonstration par récurrence.

   b) En montrant préalablement, par changement de variable, l'identité :

$$\sum_{k=0}^{n} (n-k) = \sum_{k=0}^{n} k.$$

2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (2k+1) = (n+1)^2$.

Correction exercice 1-5

1. Pour (a), on commence par vérifier l'initialisation : pour $n = 1$, on a $\displaystyle\sum_{k=0}^{1} k = 0 + 1 = 1$, tandis que $1 \cdot (1+1)/2 = 2/2 = 1$. La formule est donc initialisée. On vérifie maintenant l'héréditariété. Supposons que la propriété est vraie pour n, donc

$$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Il faut prouver la propriété pour $n+1$, c'est-à-dire il faut montrer que

$$\sum_{k=0}^{n+1} k = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

On commence par écrire $\sum_{k=0}^{n+1} k = \sum_{k=0}^{n} k + (n+1)$. En utilisant l'hypothèse de récurrence, on a

$$\sum_{k=0}^{n+1} k = \sum_{k=0}^{n} k + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{1}{2}(n+1)(n+2)\,.$$

L'hérédité est donc vérifiée, et, par conséquent, la formule est prouvée pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.
Pour la partie (b), on admet l'identité (qui est un simple changement de variable). On appelle

$$S := \sum_{k=0}^{n} k$$

la quantité à déterminer. L'identité nous dit que $\sum_{k=0}^{n}(n-k) = S$. Mais, en développant le membre de gauche, on a

$$\sum_{k=0}^{n}(n-k) = \sum_{k=0}^{n} n - \sum_{k=0}^{n} k = n\sum_{k=0}^{n} 1 - S = n(n+1) - S\,.$$

On en déduit que $n(n+1) - S = S$, d'où $S = n(n+1)/2$.

2. C'est un calcul : grâce à la formule précédente, on peut calculer

$$\sum_{k=0}^{n}(2k+1) = 2\sum_{k=0}^{n} k + \sum_{k=0}^{n} 1 = 2\,\frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = (n+1)(n+1) = (n+1)^2\,.$$

Exercice 1-6

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{i=0}^{n}\left(\sum_{j=0}^{n}(i+j)\right) = n(n+1)^2$.
2. En utilisant sans les démontrer (ce serait facile par récurrence) les deux identités $\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ et $\sum_{k=0}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{i=0}^{n}\left(\sum_{j=0}^{i} ij\right) = \frac{n(n+1)(3n^2+7n+2)}{24}.$$

Correction exercice 1-6

1. En utilisant la formule de l'exercice précédent, on a

$$\sum_{j=0}^{n}(i+j) = \sum_{j=0}^{n} i + \sum_{j=0}^{n} j = (n+1)i + \frac{n(n+1)}{2}\,,$$

qui donne

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}(i+j) = (n+1)\sum_{i=0}^{n} i + \frac{n(n+1)}{2}\sum_{i=0}^{n} 1 = \frac{n(n+1)^2}{2} + \frac{n(n+1)^2}{2} = n(n+1)^2\,.$$

La formule est donc prouvée.

2. De façon analogue, on a

$$\sum_{j=0}^{i} ij = i\sum_{j=0}^{i} j = \frac{i^2(i+1)}{2} = \frac{1}{2}\left(i^3+i^2\right)\,.$$

En utilisant cette propriété, on calcule

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{i} ij = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=0}^{i} i^3 + \sum_{j=0}^{i} i^2\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{n^2(n+1)^2}{4} + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)$$
$$= \frac{n(n+1)}{24}\big(3n(n+1)+2(2n+1)\big),$$

d'où on trouve facilement l'expression finale.

Exercice 1-7

1. Pour $0 \leq i \leq n$ et $0 \leq j \leq n$, quelles valeurs prend l'entier $\mathrm{Max}(i,j)$? Combien de fois prend-il une valeur k fixée ?
2. En déduire que
$$\sum_{i=0}^{n}\left(\sum_{j=0}^{n}\mathrm{Max}(i,j)\right) = \sum_{k=0}^{n}(2k+1)k.$$
3. En utilisant la formule de sommation des carrés des entiers consécutifs rappelée à l'exercice précédent, en déduire que :
$$\sum_{i=0}^{n}\left(\sum_{j=0}^{n}\mathrm{Max}(i,j)\right) = \frac{n(n+1)(4n+5)}{6}.$$

Correction exercice 1-7

1. Étant donné que $0 \leq i \leq n$ et $0 \leq j \leq n$, l'entier $\mathrm{Max}(i,j)$ peut prendre toutes les valeurs entre 0 et n. Maintenant, si on fixe k dans le même intervalle, on aura $\mathrm{Max}(i,j) = k$ pour :
   - toutes les couples (i,k), avec $0 \leq i < k$: on a donc k couples ;
   - toutes les couples (k,j), avec $0 \leq j < k$: encore k couples ;
   - la couple (k,k).

   En total, ça fait $2k+1$ fois.
2. Deux solutions possibles.
   (a) On découpe la somme à l'intérieur comme
$$\sum_{j=0}^{n}\mathrm{Max}(i,j) = \sum_{j=0}^{i} i + \sum_{j=i+1}^{n} j = i(i+1) + \sum_{j=0}^{n} j - \sum_{j=0}^{i} j$$
$$= i(i+1) + \frac{n(n+1)}{2} - \frac{i(i+1)}{2}$$
$$= \frac{n(n+1)}{2} + \frac{i(i+1)}{2}.$$
   Si maintenant on calcule la somme à l'extérieur, en utilisant les formules des exercices 1-5 et 1-6, on trouve facilement
$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}\mathrm{Max}(i,j) = \frac{1}{6}\,n\,(n+1)\,(4n+5).$$
   C'est exactement le même résultat qu'on trouve quand on calcule la somme à droite, après avoir fait les multiplications à l'intérieur.

   (b) Vu que la fonction peut prendre toutes les valeurs k entre 0 et n, et que la valeur k est prise $2k+1$ fois, on peut écrire notre somme comme la somme des valeurs que la fonction prend, multipliées par le nombre des fois qu'elles sont prises : notamment,
$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}\mathrm{Max}(i,j) = \sum_{k=0}^{n} k(2k+1).$$

3. La réponse donnée au point précédent répond aussi á cette question.

Exercice 1-8

1. Déterminer l'ensemble des réels x qui vérifient $-3x+4 \geq x-3$.
2. Déterminer l'ensemble des réels x qui vérifient $x^2-4x-2 \geq 0$.
3. Déterminer l'ensemble des réels x qui vérifient $(x+2)^2 < -x$.
4. Déterminer l'ensemble des réels x qui vérifient $x^3-6x \geq x^2$.

Correction exercice 1-8

1. Un calcul simple permet de trouver $4x \leq 7$, d'où $x \leq 7/4$.
2. Ça suffit de chercher les racines du polynôme x^2-4x-2, qui sont $2 \pm \sqrt{6}$. L'inégalité est alors vérifiée pour tous les nombres réels x tels que $x \leq 2-\sqrt{6}$ ou $x \geq 2+\sqrt{6}$
3. On développe le carré et on amène x à gauche : on trouve $x^2+5x+4 < 0$. On remarque que $x^2+5x+4 = (x+4)(x+1)$, et alors $-4 < x < -1$.
4. L'inégalité à résoudre est équivalente à $x^3-x^2+6x \geq 0$. On peut factoriser le membre de gauche de la façon suivante : $x^3-x^2+6x = x(x^2-x-6) = x(x-3)(x+2)$. Un tableau de signes permet de trouver la solution $\left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, -2 \leq x \leq 0 \text{ ou } x \geq 3\right\}$.

Exercice 1-9

1. Pour $a \in \mathbb{R}$, on considère les réels $A = \dfrac{a^4-7a^2+4}{3}$ et $B = \dfrac{a^4-9a^2+5}{4}$. Montrer que l'un de ces deux nombres (on précisera lequel) est toujours plus grand que l'autre.
2. Soit m et n deux réels. Pour $a \in \mathbb{R}$, on considère les réels $C = \dfrac{a^4+ma^2+2}{3}$ et $D = \dfrac{a^4+na^2+3}{4}$. Montrer que le signe de $D-C$ n'est pas constant quand a varie dans $\mathbb{R}$.

Correction exercice 1-9

1. On impose la rélation $A \leq B$. Après des calculs simples, on se reconduit à l'inégalité $a^4-a^2+1 \leq 0$. Maintenant, en posant $a^2 = y$, c'est facile à voir que cette inégalité n'est jamais satisfaite (pour tout $y \in \mathbb{R}$, on a $y^2-y+1 > 0$). Donc, on en déduit que, pour tout $a \in \mathbb{R}$, on a $A > B$.
2. On calcule
$$D-C = \frac{1}{12}\left(-a^4 + (3n-4m)\,a^2 + 1\right).$$
Maintenant, pour $a=0$, $D-C = 1/12 > 0$. Pour $a \to +\infty$, par contre, $D-C \to -\infty$, donc le signe de $D-C$ n'est pas constant.

Exercice 1-10

1. Déterminer l'ensemble des $x \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{5}{6}\}$ qui vérifient $\dfrac{-2}{6x+5} > 1$.
2. Déterminer l'ensemble des $x \in \mathbb{R} \setminus \{2, -\frac{2}{3}\}$ qui vérifient $\dfrac{1}{x-2} < \dfrac{2}{3x+2}$.

Correction exercice 1-10

1. On amène le terme de gauche à droite : l'inégalité est donc équivalente à résoudre
$$1 + \frac{2}{6x+5} < 0\,.$$
On calcule le dénominateur en commun, et on trouve
$$\frac{6x+7}{6x+5} < 0\,.$$
En dressant un tableau de signes, on conclut que l'inégalité est vérifiée pour $x \in]-7/6, -5/6[$.

2. L'argument est tout à fait analogue au précédent : on amène le terme de gauche à droite et on calcule le dénominateur en commun. Après avoir multiplié par -1 pour se retrouver avec un coefficient de x positif au numérateur, on se retrouve à résoudre l'inégalité équivalente
$$\frac{x+6}{(3x+2)(x-2)} < 0\,.$$
On résout cette inégalité en dressant un tableau de signe, et on trouve l'ensemble des solutions $S =]-\infty, -6[\cup]-2/3, 2[$.

Exercice 1-11 Montrer que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $|xy| \leq \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$.

Correction exercice 1-11

Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on calcule
$$0 \leq (x+y)^2 \;=\; x^2 + y^2 + 2xy\,.$$
De la même manière, on a aussi
$$0 \leq (x-y)^2 \;=\; x^2 + y^2 - 2xy\,.$$
Donc, en mettant ensemble ces deux inégalités, on trouve
$$-(x^2 + y^2) \leq 2xy \leq x^2 + y^2$$
ce qui est équivalent à dire que $2|xy| \leq x^2 + y^2$.

Exercice 1-12 Montrer que pour tout $x \in [-1, 1]$, $|1 - x^4| \leq 4|1 - x|$.

Correction exercice 1-12 On commence par remarquer que
$$1 - x^4 \;=\; (1 - x^2)\,(1 + x^2) \;=\; (1 - x)\,(1 + x)\,(1 + x^2)\,.$$
En utilisant le fait que $|ab| = |a|\,|b|$, on peut amener le terme de droite à gauche du signe d'inégalité et on peut mettre en facteur $|1 - x|$: cela donne
$$|1 - x|\,\big(|1 + x|\,|1 + x^2| \;-\; 4\big) \leq 0\,.$$
Maintenant, $|1 - x| \geq 0$ pour tout x, donc cela suffit de résoudre
$$|1 + x|\,|1 + x^2| \;-\; 4 \;\leq\; 0\,.$$
On note que, pour $x \in [-1, 1]$, les deux arguments de la valeur absolue sont positifs : en développant les produits, on trouve donc
$$x^3 + x^2 + x + 1 - 3 \leq 0\,.$$
Étant donné que $x \in [-1, 1]$, par inégalité triangulaire on a que
$$x^3 + x^2 + x \;\leq\; |x^3 + x^2 + x| \;\leq\; |x|^3 + |x|^2 + |x| \;\leq\; 3\,,$$
qui dit que l'inégalité de départ est toujours vérifiée pour $x \in [-1, 1]$.

Exercice 1-13 Pour x réel, on note $f(x) = |2 - |1 - x||$. Exprimer $f(x)$ sans utiliser de valeur absolue en discutant selon la position de x sur l'axe réel, et tracer le graphe de f.

Correction exercice 1-13

Premier cas : $1 - x \geq 0$, c'est-à-dire $x \leq 1$. Dans ce cas, $f(x) = |2 - (1 - x)| = |1 + x|$. Si en plus $1 + x \geq 0$, c'est-à-dire $x \geq -1$, alors $f(x) = 1 + x$.

Si, au contraire, $x < -1$, on trouve $f(x) = -x - 1$.

Deuxième cas : si $1 - x < 0$, c'est-à-dire $x > 1$, alors $f(x) = |2 + (1 - x)| = |3 - x|$. Si maintenant $x \leq 3$, alors $f(x) = 3 - x$; si $x > 3$, on a $f(x) = x - 3$.

Conclusion : Pour $x < -1$, on a $f(x) = -x - 1$. Pour $-1 \leq x \leq 1$, on a $f(x) = 1 + x$. Pour $1 < x \leq 3$, on a $f(x) = 3 - x$. Enfin, si $x > 3$, on a $f(x) = x - 3$.

Exercice 1-14 Déterminer l'ensemble des réels x qui vérifient $|2 - x| \leq 3 - x$.

Correction exercice 1-14

On sépare l'étude dans les deux cas suivants.

(i) Si $2 - x \geq 0$, alors l'inégalité devient

$$2 - x \leq 3 - x \qquad \Longrightarrow \qquad 2 \leq 3\,,$$

ce qui est vrai pour tout $x \in \mathbb{R}$. Mais x doit vérifier $x \leq 2$, donc l'ensemble des solutions de la première inégalité est $]-\infty, 2]$.

(ii) si $2 - x < 0$, alors on trouve

$$-2 + x \leq 3 - x \qquad \Longrightarrow \qquad 2x \leq 1\,,$$

ce qui est vrai pour $x \leq 1/2$. Mais x devait être plus grande que 2, donc la deuxième inégalité n'a pas de solutions.

En conclusion, l'inégalité est satisfaite pour tout $x \in]-\infty, 2]$.

Exercice 1-15 Expliciter trois réels a, b et c tels que pour tout réel x on ait :

$$x^3 - x^2 + 2x + 4 = (x+1)(ax^2 + bx + c)$$

puis en déduire l'ensemble des x réels pour lesquels $x^3 - x^2 + 2x + 4 > |x+1|$.

Correction exercice 1-15

En développant les produits à droite, on trouve l'égalité

$$x^3 - x^2 + 2x + 4 \;=\; ax^3 \;+\; (a+b)x^2 \;+\; (b+c)x \;+\; c\,.$$

On en déduit que

$$a = 1\,, \quad a + b = -1\,, \quad b + c = 2\,, \quad c = 4\,,$$

c'est-à-dire $a = 1$, $c = 4$ et $b = -2$.

Pour telles valeurs de (a, b, c), on a une factorisation de $x^3 - x^2 + 2x + 4$:

$$x^3 - x^2 + 2x + 4 \;=\; (x+1)\,(x^2 - 2x + 4)\,.$$

On remarque que $x^2 - 2x + 4 \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ (soit on calcule les racines réelles par la formule, soit on reconnaît que ce terme est de la forme $a^2 + ab + b^2$). L'inégalité à résoudre devient alors

$$(x+1)\,(x^2 - 2x + 4) \;>\; |x+1|\,.$$

Vu que le terme de droite est positif et que $x^2 - 2x + \geq 0$, on doit avoir forcement $x + 1 > 0$, c'est-à-dire $x > -1$. En utilisant cette remarque, on va résoudre alors

$$(x+1)\,(x^2 - 2x + 4) \;>\; x + 1 \qquad \Longrightarrow \qquad (x+1)\,(x^2 - 2x + 3) \;>\; 0\,.$$

Encore une fois, $x + 1 > 0$; en plus, et donc il faut résoudre $x^2 - 2x + 3 > 0$. Le polynôme $x^2 - 2x + 3$ a seulement des racines complexes, autrement dit la dernière inégalité est toujours vraie. L'ensemble des solutions est donc $]-1, +\infty[$.

Exercice 1-16

1. En utilisant la formule du binôme, calculer les sommes $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}$.

2. a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $p \in \{1, \ldots, n\}$, $p\dbinom{n}{p} = n\dbinom{n-1}{p-1}$.

   b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{p=0}^{n} p\binom{n}{p} = n2^{n-1}$.

3. À l'aide de la formule du triangle de Pascal, montrer que pour tout $(p, n) \in \mathbb{N}^2$:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{p+k}{k} = \binom{p+n+1}{n}.$$

Correction exercice 1-16

1. On a

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^k1^{n-k} = (1+1)^n = 2^n$$
$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k1^{n-k} = (1-1)^n = 0\,.$$

2. Pour n et p comme dans le texte, on calcule

$$p\binom{n}{p} = p\frac{n!}{(n-p)!\,p!} = \frac{n\,(n-1)!}{(n-p-1+1)!\,(p-1)!} = n\,\frac{(n-1)!}{\big((n-1)-(p-1)\big)!\,(p-1)!} = n\binom{n-1}{p-1}.$$

On en déduit la formule donnée. En fait, pour $n=0$, il n'y a rien a prouver (on trouve $0=0$, qui est toujours vrai). Supposons alors $n\geq 1$. On remarque que le premier terme dans la somme à gauche (correspondant à $p=0$) est nul ; donc on peut écrire

$$\sum_{p=0}^{n}p\binom{n}{p} = \sum_{p=1}^{n}p\binom{n}{p} = \sum_{p=1}^{n}n\binom{n-1}{p-1} = n\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n-1}{j} = n2^{n-1}\,,$$

qui est exactement ce qu'on voulait prouver.

3. Observons que, si $n=0$, les deux membres de l'égalité à prouver valent 1, et donc l'égalité est vraie. Supposons maintenant $n\geq 1$, $p\in\mathbb{N}$. On commence par remarquer que

$$(*)\qquad \sum_{k=0}^{n}\binom{p+k}{k} = 1+\sum_{k=1}^{n}\binom{p+k}{k}.$$

Maintenant, la formule du triangle de Pascal nous dit que, pour tout $k\geq 1$ et tout $p\in\mathbb{N}$,

$$\binom{p+k}{k} + \binom{p+k}{k-1} = \binom{p+k+1}{k}.$$

En prenant la somme sur $k=1\dots n$ à gauche et à droite, on déduit que

$$\sum_{k=1}^{n}\binom{p+k}{k} + \sum_{k=1}^{n}\binom{p+k}{k-1} = \sum_{k=1}^{n}\binom{p+k+1}{k}.$$

En faisant le changement de variable $j=k+1$ dans la somme à droite, on trouve

$$\sum_{k=1}^{n}\binom{p+k}{k} + \sum_{k=1}^{n}\binom{p+k}{k-1} = \sum_{j=2}^{n+1}\binom{p+j}{j-1} = \sum_{j=1}^{n}\binom{p+j}{j-1} - 1 + \binom{p+n+1}{n}.$$

On peut simplifier le terme qui apparaît à droite et à gauche, et on obtient

$$\sum_{k=1}^{n}\binom{p+k}{k} = -1 + \binom{p+n+1}{n}.$$

En utilisant cette égalité dans $(*)$, on déduit tout de suite la formule souhaitée.

Exercice 1-17 Soit $n\in\mathbb{N}$.

1. Montrer que pour tout $k\in\{0,\dots,n\}$, $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$.

2. Montrer que pour tout $k\in\{0,\dots,n-1\}$, $\binom{2n}{k}<\binom{2n}{k+1}$. En déduire que pour tout $k\in\{0,\dots,2n\}$, $\binom{2n}{k}\leq\binom{2n}{n}$.

3. Montrer que $\dfrac{2^{2n}}{2n+1} \leq \dbinom{2n}{n}$. (Indication : on pourra considérer l'entier $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k}$).

Correction exercice 1-17

1. C'est un calcul simple : par définition, on a

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{n!}{(n-(n-k))!\,(n-k)!} = \binom{n}{n-k}.$$

2. L'inégalité à prouver est équivalent à l'inégalité suivante : pour tout $0 \leq k \leq n-1$,

$$\frac{1}{k!\,(2n-k)!} < \frac{1}{(k+1)!\,(2n-k-1)!} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{(k+1)!}{k!} < \frac{(2n-k)!}{(2n-k-1)!},$$

c'est-à-dire $k+1 < 2n-k$, ce qui est toujours vrai (car $k \leq n-1$). Soit maintenant $k = n+1, \ldots 2n$: grâce à la question du point 1, on peut écrire

$$\binom{2n}{k} = \binom{2n}{2n-k}.$$

Vu que $n+1 \leq k \leq 2n$, on a que $0 \leq 2n-k \leq n-1$, qui implique (grâce à l'inégalité prouvée ci-dessus)

$$\binom{2n}{k} = \binom{2n}{2n-k} < \binom{2n}{2n-k+1} = = \binom{2n}{k-1}.$$

En conclusion, la valeur maximale est atteinte pour $k = n$, et on a donc

$$\binom{2n}{k} \leq \binom{2n}{n}$$

pour tout k entre 0 et $2n$.

Exercice 1-101

1. Expliciter deux constantes réelles a et b telles que pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$, on ait :

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1} + \frac{a}{k+2}.$$

2. Soit $n \geq 2$ un entier. Utiliser la question précédente pour obtenir une expression pas trop compliquée de la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$.

Exercice 1-102 Soit $n \in \mathbb{N}$. L'objectif de cet exercice est de refaire l'exercice 7 **sans** considérer comme connue la formule de sommation des carrés d'entiers consécutifs. On notera $S = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2$, et on fera semblant de ne pas savoir calculer cet entier S.

1. En refaisant à l'identique l'exercice 7, montrer que :

$$\sum_{i=0}^{n} \left(\sum_{j=0}^{n} \mathrm{Max}(i,j) \right) = 2S + \frac{n(n+1)}{2}.$$

2. Soit $i \in \{0, \ldots, n\}$.

   a) Montrer que $\displaystyle\sum_{j=0}^{n} \mathrm{Max}(i,j) = \sum_{j=0}^{i} i + \sum_{j=i+1}^{n} j$.

   b) Montrer d'une part que $\displaystyle\sum_{j=0}^{i} i = i(i+1)$ et d'autre part que $\displaystyle\sum_{j=i+1}^{n} j = \frac{n(n+1)}{2} - \frac{i(i+1)}{2}$.

3. En utilisant la question précédente, obtenir la relation :

$$4\sum_{i=0}^{n}\left(\sum_{j=0}^{n}\mathrm{Max}(i,j)\right) = 2\sum_{i=0}^{n}(n(n+1)+i^2+i).$$

4. En rapprochant les formules prouvées aux questions 1 et 3, conclure.

Exercice 1-103 Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

Exercice 1-104

1. Déterminer l'ensemble des réels x qui vérifient $x^4 - 13x^2 + 36 \leq 0$.
2. Déterminer l'ensemble des $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 3\}$ qui vérifient $\dfrac{x-6}{3-x} < \dfrac{x+6}{x+1}$.
3. Déterminer l'ensemble des réels x qui vérifient $|x-3| + |x-7| = 4$.
4. Déterminer l'ensemble des réels x qui vérifient $|x-1| + |x-2| < 1$.

Exercice 1-105 Soit x et y deux réels tels que $0 < x \leq y$. On pose :

$$m = \frac{x+y}{2}, \qquad g = \sqrt{xy}, \qquad h = \frac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}.$$

L'objectif de l'exercice est de montrer la chaîne d'inégalités : $x \leq h \leq g \leq m \leq y$.

1. Montrer que $m \leq y$.
2. Montrer que $g \leq m$.
3. Montrer que $x \leq h$. (Indication : on pourra chercher à comparer $1/x$ et $1/h$).
4. Montrer que $h \leq g$.

Exercice 1-106 Soit a et b deux réels avec $0 < a < b$ et $n \in \mathbb{N}^*$ un entier. L'objectif est d'étudier le sens de variation du k-ème terme du développement de $(a+b)^n$. Plus précisément, pour chaque indice k variant entre 0 et n, on note $u_k = \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$ et on s'intéresse à la liste de réels $(u_0, \ldots, u_n)$.

1. Montrer que pour tout entier $k \in \{0, \ldots, n-1\}$, $\dfrac{u_{k+1}}{u_k} = \dfrac{n-k}{k+1}\dfrac{b}{a}$.
2. Montrer que pour tout $k \in \{0, \ldots, n-1\}$, $\dfrac{u_{k+1}}{u_k} = 1 \iff k = \dfrac{nb-a}{a+b}$ et $\dfrac{u_{k+1}}{u_k} > 1 \iff k < \dfrac{nb-a}{a+b}$.
3. Dans cette question, on suppose que $n < \dfrac{b}{a}$. Montrer que $u_0 < u_1 < u_2 < \cdots < u_n$.
4. Dans cette question, on suppose que $n = \dfrac{b}{a}$. Montrer que $u_0 < u_1 < u_2 < \cdots < u_{n-1} = u_n$.
5. (Question plus difficile demandant de l'initiative). Et quand $n > \dfrac{b}{a}$, comment se comporte la liste $(u_0, \cdots, u_n)$?

Exercice 1-107

1. On rappelle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$.
   (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k-1)k$.
   (b) On pose $v_k = k(k-1)(k-2)$.
      i. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $v_{k+1} - v_k = 3k(k-1)$.
      ii. Calculer alors $T_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}(v_{k+1} - v_k)$.
      iii. En déduire un lien entre S_n et T_n.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$, calculer $C = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{n} 2^{k-l}$.