Feuille 10. Dérivabilité

Exercice 10-1 Pour chacune des fonctions f définies ci-dessous, calculer la fonction dérivée f' :

1) $x^4 + 3x^2 - 6$ 2) $6x^{7/2} + 4x^{5/2} - 2x$ 3) $\sqrt{3x} + \sqrt[3]{x} + \dfrac{1}{x}$ 4) $x(x+3)e^x$

5) $\dfrac{x^3+1}{x^2-x-2}$ 6) $\dfrac{\sqrt{1+x}}{1+\sqrt{x}}$ 7) $\dfrac{\ln x}{x^3}$ 8) $\dfrac{\sin x}{1+\cos x}$

9) $\sqrt[3]{x^2+x+1}$ 10) $\sin(\cos(3x))$ 11) $\ln(\sin^2 x)$ 12) e^{-x^2}

13) $(1-x)^{7/3}$ 14) $\ln(|2x|)$ 15) $e^{2i\pi x}$ 16) $2^{\ln x}$

Réponse :

1. $4x^3 + 6x$
2. $21x^{5/2} + 10x^{3/2} - 2$
3. $\dfrac{3}{2\sqrt{3x}} + \dfrac{1}{3}x^{-2/3} - \dfrac{1}{x^2}$
4. $(x^2 + 5x + 3)e^x$
5. $\dfrac{x^4 - 2x^3 - 6x^2 - 2x + 1}{(x^2 - x - 2)^2}$
6. $\dfrac{\sqrt{x} - 1}{2\sqrt{x}\sqrt{1+x}(1+\sqrt{x})^2}$
7. $\dfrac{1 - 3\ln x}{x^4}$
8. $\dfrac{1}{1 + \cos x}$
9. $1/3(x^2 + x + 1)^{-2/3}(2x + 1)$
10. $-3\cos(\cos(3x))\sin(3x)$
11. $\dfrac{2\cos x}{\sin x}$
12. $-2xe^{-x^2}$
13. $-7/3(1-x)^{4/3}$
14. $1/x$
15. $e^{2i\pi x}2i\pi$
16. $\dfrac{1}{x}\ln(2)2^{\ln x}$

Exercice 10-2 Déterminer $a, b \in \mathbb{R}$ tels que la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & \text{si } 0 \leq x \leq 1, \\ ax^2 + bx + 1, & \text{si } x > 1, \end{cases} \tag{1}$$

soit dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Réponse : La fonction est continue et dérivable sur $]0,1[$ et sur $]1,+\infty[$. Le seul problème est $x = 1$. la fonction f est continue en $x = 1$ si et seulement si $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1)$, i.e. $1 = a + b + 1$, i.e. $a+b=0$. Alors, f est dérivable si et seulement si ses dérivées à droite et à gauche en 1 existent et sont égales, i.e. $\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$, i.e. $\frac{1}{2}=2a+b$. Finalement, f est dérivable sur $]0,+\infty[$ si et seulement si $a+b=0$ et $2a+b=\frac{1}{2}$, i.e. $a=\frac{1}{2}$ et $b=-\frac{1}{2}$.

Exercice 10-3

1. Étudier la continuité et la dérivabilité de la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x)=\begin{cases} e^x-x, & \text{si } x<0,\\ \cos^2(\pi x), & \text{si } 0\le x\le 1,\\ 1+\dfrac{\ln x}{x}, & \text{si } x>1.\end{cases} \tag{2}$$

2. Même question avec : $f(x)=\sqrt{|x|}$.

Réponse : **(1)** La fonction est continue en dehors de 0 et 1 parce que chaque point x de $\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$ appartient à un intervalle ouvert sur lequel f est définie de manière unique et par une fonction continue, en l'occurrence par e^x-x ou $\cos^2(\pi x)$ ou $1+\frac{\ln x}{x}$. Elle est continue à droite en 0 et à gauche en 1 parce que la définition de la fonction en ces points est donnée par $\cos^2(\pi x)$. Comme $\lim_{x\to 0^-} e^x-x=1=f(0)$, elle est aussi continue à gauche en 0 et comme $\lim_{x\to 1^+} 1+\frac{\ln x}{x}=1=f(1)$ elle est aussi continue à droite en 1. Elle est donc partout continue.

Pour $x<0$, f est dérivable de dérivée $f'(x)=e^x-1$. Pour $0<x<1$, f est dérivable de dérivée $f'(x)=-2\pi\cos(\pi x)\sin(\pi x)$. Pour $x>1$, f est dérivable de dérivée $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$.

En 0, $\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x^2}{2x}=0$ et $\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\cos^2(\pi x)-1}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{-(\pi x)^2(\cos(\pi x)+1)}{2x}=0$. La fonction f est donc dérivable en O de dérivée $f'(0)=0$.

Ensuite $\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{\cos^2(\pi x)-1}{x-1}=\lim_{y\to 0^-}\frac{\cos^2(\pi y)-1}{y}=\lim_{y\to 0^-}\frac{-(\pi y)^2(\cos(\pi y)+1)}{2y}=0$ et $\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{\ln x}{x(x-1)}=\lim_{y\to 0^+}\frac{\ln(y+1)}{y(y+1)}=1$. Donc f admet une dérivée à droite et une dérivée à gauche en 1 mais n'est pas dérivable.

(2) La fonction f est continue en tout point de $\mathbb{R}$ puisqu'elle est la composée de deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$, en l'occurrence $\sqrt{\ }$ et $|\ |$.

Elle est dérivable en tout point de $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ car chaque réel non nul appartient à un intervalle ouvert sur lequel f est définie par $x\mapsto\sqrt{x}$ pour $x>0$ et $x\mapsto\sqrt{-x}$ pour $x<0$.

En 0, $\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{-x}-0}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x}}{-x}=-\infty$, tandis que $\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x}-0}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x}}{x}=+\infty$. Par conséquent, f n'est pas dérivable en 0 ; elle ne l'est pas à gauche ni à droite non plus.

Exercice 10-4 Préciser pour chacune des fonctions suivantes de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ en quels points elles sont dérivables, dérivables à droite, dérivables à gauche, et les valeurs de leurs dérivées, dérivées à droite, dérivées à gauche.

1. $f(x)=\cos(\cos x)$.
2. $g(x)=\sqrt{1+\cos x}$.
3. $h(x)=\sqrt{|\sin x|}$.

Réponse :

1. La fonction $\cos x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc $f(x)$ est aussi dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $f'(x)=\sin(\cos x)\sin(x)$.

2. La fonction g est périodique de période 2π. En dehors de π, g est dérivable de dérivée $g'(x) = \dfrac{-\sin x}{2\sqrt{1+\cos x}}$.

   Pour les valeurs supérieures en π, $\lim\limits_{x\to\pi^+} \dfrac{\sqrt{1+\cos x}}{x-\pi} = \lim\limits_{y\to 0^+} \dfrac{\sqrt{1-\cos y}}{y} = \lim\limits_{y\to 0^+} \dfrac{|y|}{\sqrt{2}y} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Ce qui donne la valeur de la dérivée à droite. Par contre en π^- on obtiendra $-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, ce qui donne la valeur de la dérivée à gauche. Par conséquent, g n'est pas dérivable en π. Elle ne l'est qu'à gauche et à droite. Par périodicité, le même manque de dérivabilité existe en tout point de $\mathbb{R}$ de la forme $(2k+1)\pi$.
3. La fonction $h(x)$ est périodique de période π. Comme $\sin x$ est partout dérivable, que $|x|$ est dérivable en dehors de 0, et que $\sqrt{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, la fonction $h(x)$ est dérivable sur $]0,\pi[$ de dérivée $h'(x) = \dfrac{\cos x}{2\sin x}$.

   Par contre en 0, h n'est ni dérivable à droite, ni à gauche, car $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{h(x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ n'est pas finie. Un raisonnement symétrique donne la même conclusion en 0^-. Ce raisonnement s'étend sur $\mathbb{R}$ par périodicité et h n'est pas dérivable en $k\pi$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

Exercice 10-5 Soit f la fonction réelle d'une variable réelle définie par :

$$\begin{array}{cccc} f & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \begin{cases} x + \exp(-1/x^2), & \text{si } x > 0 \\ \sin x, & \text{si } x \leq 0 \end{cases} \end{array}.$$

1. Montrer que f est dérivable en tout point x de $\mathbb{R}^*$ en calculant sa dérivée.
2. f est-elle dérivable en 0 ?
3. f' est elle continue en 0 ?
4. f est-elle deux fois dérivable en 0 ?

Réponse :

1. Tout d'abord, f est continue sur $\mathbb{R}^*$ parce que chaque point de cet ensemble appartient à un intervalle ouvert sur lequel f est uniquement définie comme composition de fonctions simples, continues sur cet intervalle. Ensuite, comme $\lim\limits_{x\to 0^+} x + \exp(-1/x^2) = 0 = f(0)$ elle est aussi continue en 0.

   f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, de dérivée $f'(x) = 1 + 2/x^3 \exp(-1/x^2)$, et aussi sur $\mathbb{R}_-^*$ de dérivée $f'(x) = \cos x$.
2. On a $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^+} 1 + 1/x \exp(-1/x^2) = 1$ et $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{\sin x}{x} = 1$. Donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = 1$.
3. Comme $\lim\limits_{x\to 0^+} 1 + 2/x^3 \exp(-1/x^2) = 1$ et $\lim\limits_{x\to 0^-} \cos x = 1$, f' est continue en 0, et donc continue sur $\mathbb{R}$.
4. On a $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f'(x)-f'(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^+} 2/x^4 \exp(-1/x^2) = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{f'(x)-f'(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{\cos x - 1}{x} = 0$, d'où f est deux fois dérivable en 0, et $f''(0) = 0$.

Exercice 10-6 Soit $n \in \mathbb{N}$. On définit $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = \begin{cases} x^n \sin(1/x), & \text{si } x \neq 0 \\ 0, & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$

1. Pour quelles valeurs de n, f_n est-elle continue ?

2. Pour quelles valeurs de n, est-elle f_n dérivable ?
3. Pour quelles valeurs de n, est-elle f'_n continue ?
4. Pour quelles valeurs de n, est-elle f'_n dérivable ?

Réponse :

1. Comme sin est une fonction bornée, on a $\lim_{x\to 0} f_n(x) = 0$ si $n \neq 0$. Par contre $\lim_{x\to 0} \sin(1/x)$ n'existe pas. Vérifions-le en utilisant deux suites de nombres (a_k) et (b_k).

$$a_k = \frac{1}{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi} \text{ et } b_k = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}.$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $f_0(a_k) = -1 \xrightarrow[k\to+\infty]{} -1$ et $f_0(b_k) = 1 \xrightarrow[k\to+\infty]{} 1$ avec a_k et b_k convergeant vers 0, donc la limite de f_0 en 0 ne peut exister. Ainsi f_n est continue sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $n \geq 1$.
2. En dehors de 0, f_n est dérivable, de dérivée $f'_n(x) = nx^{n-1}\sin(1/x) - x^{n-2}\cos(1/x)$. En 0 on a $\lim_{x\to 0} \frac{f_n(x) - f_n(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} x^{n-1}\sin(1/x)$. Ainsi f est dérivable en 0 si et seulement si $n \geq 2$, auquel cas $f'_n(0) = 0$.
3. On a $\lim_{x\to 0} f'_n(x) = \lim_{x\to 0} nx^{n-1}\sin(1/x) - x^{n-2}\cos(1/x) = 0$ seulement si $n \geq 3$, car quand $n = 2$, $\lim_{x\to 0} \cos(1/x)$ n'existe pas, une conclusion à laquelle on peut aboutir par la même méthode que la non existence de la limite de $\sin(1/x)$ en 0. Donc f'_n est continue si et seulement si $n \geq 3$.
4. f'_n est dérivable en dehors de 0. On a $\lim_{x\to 0} \frac{f'_n(x) - f'_n(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} nx^{n-2}\sin(1/x) - x^{n-3}\cos(1/x)$ et donc f'_n est dérivable en 0 si et seulement si $n \geq 4$.

Exercice 10-7 Appliquer le théorème des accroissements finis pour démontrer les inégalités suivantes :

1. $|\sin x| \leq |x|$ pour $x \geq 0$;
2. $\ln(1 + x) \leq x$ pour $x \geq 0$.

Réponse :

1. On considére $f(t) = \sin t$ sur $[0, x]$. La fonction f est continue sur $[0, x]$ et dérivable sur $]0, x[$, par le théorème des accroissements finis il existe $c \in]0, x[$ telle que $f'(c) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$. Donc, $|\cos(c)(x - 0)| = |\sin x|$. Puisque $|\cos c| \leq 1$ on a $|\sin x| \leq |x|$.
2. Cette fois si on considère $f(t) = \ln(1 + t)$ sur $[0, x]$, $x \geq 0$. La fonction f est continue sur $[0, x]$ et dérivable sur $]0, x[$, par le théorème des accroissements finis il existe $c \in]0, x[$ telle que $\frac{\ln(1 + x) - \ln 1}{x - 0} = \frac{1}{1 + c}$. Donc $\ln(1 + x) = \frac{x}{1 + c} \leq x$.

Exercice 10-8

1. Montrer que pour tous réels a et b avec $0 \leq a < b$:

$$\frac{b - a}{1 + b^2} < \arctan b - \arctan a < \frac{b - a}{1 + a^2}.$$

2. En déduire que :

$$\frac{\pi}{4} + \frac{3}{25} < \arctan\left(\frac{4}{3}\right) < \frac{\pi}{4} + \frac{1}{6}.$$

Réponse :

1. La fonction arctan est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$. Le théorème des accroissements finis montre alors qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que
$$\arctan b - \arctan a = \arctan' c(b-a) \quad .$$
Comme $\arctan' x = \dfrac{1}{1+x^2}$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ on a $\dfrac{1}{1+b^2} < \dfrac{1}{1+c^2} < \dfrac{1}{1+a^2}$ d'où le résultat.
2. Il suffit d'écrire l'encadrement précédent pour $a = 1$ et $b = 4/3$.

Exercice 10-9

1. Montrer que pour tous réels x et y : $|\cos y - \cos x| \leq |y - x|$.
2. Montrer que pour tous réels x et y tels que $x \neq y$: $|\cos y - \cos x| < |y - x|$.

Réponse :

1. La fonction $\cos x$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$. Par conséquent, si $x \neq y$, disons $x < y$ sans perte de généralité, le théorème des accroissements finis nous montre qu'il existe $c \in]x, y[$ tel que
$$\cos(x) - \cos(y) \quad = \quad \cos'(c)(x-y) \quad = \quad (-\sin(c))(x-y) \quad .$$
En valeur absolue, on obtient
$$|\cos(x) - \cos(y)| \quad = \quad |\cos'(c)||x-y| \quad \leq \quad |x-y| \quad .$$
parce que $-1 \leq \sin(c) \leq 1$. Si $x = y$, bien sûr l'inégalité large reste vraie.
2. On essaye d'affiner l'inégalité du premier point. Sans perte de généralité, on supposera $x < y$. Il y a deux cas à considérer. Dans le premier il n'existe pas de $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x < \dfrac{\pi}{2} < y$. Sous cette hypothèse, pour tout $c \in]x, y[$, $|\cos(c)| < 1$. Par conséquent, l'inégalité qui découle du théorème des accroissements finis devient
$$|\cos(x) - \cos(y)| \quad = \quad |\cos'(c)||x-y| \quad < \quad |x-y| \quad .$$
Mettons-nous maintenant dans le cas contraire. Comme l'intervalle $]x, y[$ est borné il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x \leq \dfrac{\pi}{2} + k\pi \leq y$. Alors,
$$\begin{aligned} |\cos(x) - \cos(y)| &= |\cos(x) - \cos(\frac{\pi}{2} + k\pi) + \cos(\frac{\pi}{2} + k\pi) - \cos(\cos(y)| \\ &= |\cos(x) - 0| + |0 - \cos(y)| \\ &\leq |\cos'(c_1)||x - (\frac{\pi}{2} + k\pi)| + |\cos'(c_1)| \cos(\frac{\pi}{2} + k\pi) - y|. \end{aligned}$$
Comme $x < y$, soit $x < \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, soit $\dfrac{\pi}{2} + k\pi < y$. Respectivement, soit $|\cos(c_1)| < 1$, soit $|\cos(c_2)| < 1$. Ainsi
$$\begin{aligned} |\cos(x) - \cos(y)| &< |x - (\frac{\pi}{2} + k\pi)| \ + \ |\cos(\frac{\pi}{2} + k\pi) - y| \\ &= \cos(\frac{\pi}{2} + k\pi) \ - \ x + y \ - \ \cos(\frac{\pi}{2} + k\pi) \\ &= y - x \\ &= |x - y|. \end{aligned}$$

Exercice 10-10 Soit f de $[0, 1]$ vers $\mathbb{R}$ une fonction trois fois dérivable.

1. On suppose que $f(0) = f'(0) = f''(0) = 0$ et que $f(1) = 0$. Montrer que f''' s'annule sur l'intervalle $]0, 1[$.
2. On suppose ici que $f(0) = f(1/3) = f(2/3) = f(1) = 0$. Montrer le même résultat. Généralisez à une fonction k fois dérivable ayant n zéros, pour tous entiers $k < n$.
3. On suppose ici que $f(0) = f'(0) = 0$ et que $f(1) = f'(1) = 0$. Montrer le même résultat.

Réponse : C'est une suite d'applications du théorème de Rolle. L'existence de α et β est justifiée par ce théorème.

1. Comme $f(0) = f(1) = 0$ il existe $\alpha \in]0, 1[$ tel que $f'(\alpha) = 0$. Alors comme $f'(0) = f'(\alpha) = 0$ il existe $\beta \in]0, \alpha[$ tel que $f''(\beta) = 0$, et finalement, comme $f''(0) = f''(\beta) = 0$ il existe $\gamma \in]0, \beta[\subset]0, 1[$ tel que $f'''(\gamma) = 0$.
2. Pour f' on a trois racines distinctes, une entre 0 et 1/3, une entre 1/3 et 2/3 et une entre 2/3 et 1, donc 2 racines distinctes pour f'' et finalement 1 pour f'''.
   On montre la généralisation par récurrence sur $k < n$, pour n fixé. Soit g une fonction ayant n zéros. On considère le prédicat $P(k)$: si g est k fois dérivable, alors $g^{(k)}$ a au moins $n-k$ zéros.
   Initialisation : $P(0)$ est évidemment vrai.
   Hérédité : Soit $0 < k < n$. On suppose $P(k-1)$ vrai. Montrons que $P(k)$ l'est. Si g est k fois dérivable, elle est $k-1$ fois dérivable, et par hypothèse de récurrence $g^{(k-1)}$ a au moins $n-k+1$ zéros. On applique le théorème de Rolle à cette fonction, et on obtient bien que $g^{(k)}$ admet au moins $n-k$ zéros.
   Conclusion : $P(0)$ est vrai et la propriété est héréditaire donc pour tout $k < n$, si g est k fois dérivable, $g^{(k)}$ admet au moins $n-k$ zéros.
3. $f(0) = f(1) = 0$ nous donne une troisième racine pour f', on conclut comme ci dessus.

Exercice 10-11 On considère $P : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction polynomiale de degré $n \in \mathbb{N}$, c'est à dire qu'il existe des nombres réels $a_0, a_1, ..., a_n$ tels que $a_n \neq 0$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots a_n x^n.$$

Montrer qu'il existe au plus n solutions réelles à l'équation $P(x) = 0$.

Solution :

On utilise la généralisation du 2) de l'exercice précédent : Si P avait strictement plus que n racines, alors sa dérivée n-ème, qui est une constante non nulle, aurait au moins un zéro, ce qui est absurde.

Remarque : On peut le montrer directement par récurrence : pour $n \geq 1$ entier, notons $\mathcal{P}(n)$ la proposition suivante :

> Pour tout polynôme réel P de degré n, il existe au plus n nombres réels distincts $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ tels que, pour tout $1 \leq k \leq n$, $P(x_k) = 0$.

Initialisation : Une fonction affine a au plus un zéro.

Hérédité : On considère un entier $n \geq 2$ tel que $\mathcal{P}(n-1)$ soit vraie. Montrons que $\mathcal{P}(n)$ est également vraie.

On effectue un raisonnement par l'absurde. Supposons que P soit une fonction polynomiale de degré n, et supposons qu'il existe $n+1$ solutions distinctes $x_1 < x_2 < \cdots < x_n < x_{n+1}$ de l'équation $P(x) = 0$. Alors

$$0 = P(x_1) = P(x_2) = \cdots = P(x_n) = P(x_{n+1}).$$

Le théorème de Rolle appliqué à la fonction $P : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{P}$ (qui est dérivable en chaque point de $\mathbb{R}$) sur les intervalles $I_1, I_2, ..., I_n$ définis par

$$\forall k \in \{1, ..., n\}, \quad I_k =]x_k, x_{k+1}[$$

fournit n nombres réels $y_1 \in I_1$, $y_2 \in I_2$, ..., $y_n \in I_n$ tels que

$$0 = P'(y_1) = P'(y_2) = \cdots = P'(y_n).$$

Cependant, la fonction P' est une fonction polynomiale de degré n. L'hypothèse de récurrence appliquée à P' montre que nécessairement $P' = 0$. On en déduit que P est un polynôme constant, ce qui est une contradiction.

Exercice 10-12 Montrer que $100 + \frac{1}{200}$ est une approximation par excès de $\sqrt{10001}$, et que l'erreur d'approximation est inférieure à $\frac{1}{4 \cdot 10^6}$.

Réponse : On applique le théorème des accroissements finis à $f(x) = \sqrt{x}$, de dérivée $\frac{1}{2\sqrt{x}}$. En effet, d'après le théorème des accroissements finis, il existe $c \in]10000, 10001[$ tel que $\sqrt{10001} - \sqrt{10000} = \frac{1}{2\sqrt{c}}$. Comme la fonction $x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{c}}$ est décroissante, $\frac{1}{2\sqrt{c}} < \frac{1}{2\sqrt{10000}} = \frac{1}{200}$. Par conséquent, $\sqrt{10001} = 100 + \frac{1}{2\sqrt{c}} < 100 + \frac{1}{200}$. La valeur absolue de la différence entre la valeur exacte et l'approximation est

$$\left|\frac{1}{2\sqrt{c}} - \frac{1}{200}\right| = \frac{1}{2}\left|\frac{\sqrt{c} - 100}{100\sqrt{c}}\right| = \frac{1}{2}\left|\frac{c - 10^4}{100\sqrt{c}(\sqrt{c} + 100)}\right| < \frac{1}{4\ .\ 10^6} \quad .$$

Exercice 10-13 Montrer que pour tout entier $k \geq 1$: $\frac{1}{k+1} < \ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k}$. En déduire que pour tout entier $n \geq 1$, on a $\ln(n+1) \leq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \leq 1 + \ln(n)$.

Déterminer $\lim_{n\to+\infty} H_n$ où $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$

Réponse : La fonction ln est continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, de dérivée $1/x$. Comme pour $k \geq 1$, $1/k \leq 1$, le théorème des accroissements finis montre que pour $k \geq 1$, $\frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln k \leq \frac{1}{k}$. Les sommes téléscopiques impliquent $\ln(n+1) = \sum_{k=1}^{n} \ln(k+1) - \ln k \leq H_n$, et $H_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} \leq 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \ln(k+1) - \ln k = 1 + \ln(n)$ d'où le résultat. Comme $\lim_{n\to\infty} \ln n = \infty$, on conclut que H_n diverge aussi.

Exercice 10-14

1. Utiliser l'exercice précédent pour montrer que pour $\alpha \leq 1$
$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} = \infty.$$
2. On suppose maintenant $\alpha > 1$. Pour $k \geq 2$, comparer $\frac{\alpha - 1}{k^\alpha}$ et $\frac{1}{(k-1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{k^{\alpha-1}}$.
3. Toujours pour $\alpha > 1$, montrer que
$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} = \ell, \text{ avec } \ell < \frac{\alpha}{\alpha - 1}.$$

Réponse :

1. Si $\alpha \leq 1$, alors $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \geq \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \infty$.
2. La fonction $f(x) = 1/x^{\alpha-1}$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, de dérivée $-\frac{\alpha-1}{x^\alpha}$. Par le théorème des accroissements finis, appliqué sur l'intervalle $[k-1, k]$, $\frac{1}{(k-1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{k^{\alpha-1}} = f(k-1) - f(k) = |f(k-1) - f(k)| > \frac{\alpha-1}{k^\alpha}$.
3. On a donc par les sommes télescopiques, $\sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha-1}{k^\alpha} = \alpha - 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{\alpha-1}{k^\alpha} < 1 - \frac{1}{n^{\alpha-1}} + \alpha - 1$.

   A la limite, on obtient $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha-1}{k^\alpha} < \alpha$. Ceci équivaut à $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} < \frac{\alpha}{\alpha-1}$.

Exercice 10-15

Soit $n \geq 1$ un nombre entier et $a_0, a_1, ..., a_n \in \mathbb{R}$ tels que

$$\frac{a_0}{1} + \frac{a_1}{2} + \cdots + \frac{a_n}{n+1} = 0.$$

Montrer que l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$

$$a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n = 0$$

a au moins une solution x dans l'intervalle $]0, 1[$.

Solution :

On considère les deux fonctions polynomiales $P, Q : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définies par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \begin{aligned} P(x) &= a_0 + a_1 x + \cdots a_n x^n \\ Q(x) &= \frac{a_0}{1} x + \frac{a_1}{2} x^2 + \cdots + \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}. \end{aligned}$$

On commence par remarquer que $Q' = P$ (la fonction Q est polynomiale, donc dérivable). Ensuite, l'hypothèse de l'énoncé assure que

$$0 = Q(0) = Q(1).$$

Puisque Q est dérivable, le théorème de Rolle assure donc l'existence de $x \in]0, 1[$ tel que $Q'(x) = 0 = P(x)$, soit encore,

$$a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n = 0.$$

Exercice 10-16

On condidère deux fonctions $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que f soit deux fois dérivable et g continue.

1. Soit $c \in \mathbb{R}$ un maximum local de f. Montrer que $f''(c) \leq 0$.
2. De même, si $c \in \mathbb{R}$ est un minimum local de f, montrer que $f''(c) \geq 0$.
3. On suppose que

   $$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f''(x) + g(x) f'(x) - f(x) = 0.$$

   . On suppose de plus qu'il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et $f(a) = f(b) = 0$. Montrer que $f(x) = 0$ pour tout $x \in [a, b]$.

Solution :

1. On raisonne par l'absurde : supposons, en vue d'obtenir une contradiction, que $f''(c) > 0$, c'est à dire que
$$f''(c) = \lim_{h\to 0} \frac{f'(c+h) - f'(c)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f'(c+h)}{h} > 0.$$
En effet, $f'(c) = 0$ puisque c est un extremum (local) de f. On en déduit que $f'(c+h)h^{-1}$ est positif pour $h \neq 0$ assez petit : il existe $\delta > 0$ tel que
$$\begin{array}{ll} f'(c+h) > 0 & \text{pour } h \in]0, \delta[\\ f'(c+h) < 0 & \text{pour } h \in]-\delta, 0[. \end{array}$$
En particulier, $h \mapsto f(c+h)$ est décroissante sur $]-\delta, 0[$ et croissante sur $]0, \delta[$. La fonction f admet donc un minimum local en c. Mais comme c est aussi un maximum local, cela signifie que f est constante sur un petit intervalle $I =]c-\eta, c+\eta[$ contenant a (avec $\eta > 0$). On en déduit que $f''(c) = 0$, ce qui est une contradiction.
2. En posant $F = -f$ et en utilisant la question précédente à F, on montre que $f''(c) \geq 0$.
3. Supposons, en vue d'obtenir une contradiction, que f ne soit pas constamment nulle sur $[a, b]$. Comme f est continue, elle admet un maximum c et un minimum c' sur le segment $[a, b]$, c'est à dire que
$$\forall x \in [a, b], \qquad f(c') \leq f(x) \leq f(c).$$
En particulier, $f(c') \leq 0 = f(a) = f(b) \leq f(c)$. Comme nous avons supposé que f est non identiquement nulle sur $[a, b]$, nécessairement $f(c') < 0$ ou $f(c) > 0$.
Plaçons-nous d'abord dans le cas où $f(c) > 0$. En évaluant l'équation vérifiée par f en c on trouve
$$f''(c) + g(c)f'(c) - f(c) = 0.$$
Mais comme c est un maximum (global) de f (sur $[a, b]$), on a d'une part $f'(c) = 0$, et d'autre part $f''(c) \leq 0$ grâce à la question 1. La relation précédente devient
$$0 < f(c) = f''(c) + g(c)f'(c) = f''(c) \leq 0,$$
ce qui est une contradiction. Dans le cas où $f(c') < 0$, on montre de manière symétrique que
$$0 \leq f''(c') = f''(c') + f'(c')g(c') = f(c') < 0,$$
ce qui est aussi une contradiction.

Exercice 10-101 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable. Calculer $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{a\,f(x) - x\,f(a)}{x-a}$, pour un $a \in \mathbb{R}$.

Réponse : On a $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{a\,f(x) - x\,f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{a\,f(x) - a\,f(a) + a\,f(a) - x\,f(a)}{x-a} = af'(a) - f(a)$.

Exercice 10-102 Montrer que la fonction P de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par $P(x) = x^{100} + ax^7 + bx + c$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$) a au plus 4 racines réelles.

Réponse : La dérivée seconde de P est $9900x^{98} + 42ax^5$. Ce polynôme a au plus deux racines réelles, 0 et $\displaystyle\sqrt[93]{\frac{-42a}{9900}}$. Par conséquent, P a au plus deux points d'inflexion. Ceci implique que P ait au plus 4 racines réelles.

Exercice 10-103 On définit
$$\begin{array}{rcccl} f & : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & \ln(1+x^2) - \arctan x \end{array}.$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, $f^{(n)}(x) = \dfrac{P_n(x)}{(1+x^2)^n}$ où P_n est un polynôme de degré n qui satisfait les identités
   (a) $P_1(x) = 2x - 1$,
   (b) $P_{n+1}(x) = (x^2+1)P_n'(x) - 2xP_n(x)$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le polynôme P_n a n racines distinctes.

Réponse :

1. C'est un raisonnement par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.
2. On se contente d'une indication. Pour $n = 1$, c'est clair. Pour $n+1$ on évalue P_{n+1} en les n racines supposées distinctes de P_n et étudie le changement de signe.

Exercice 10-104 Soit $f : [a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, dérivable sur $]a, b[$. Montrer que f est dérivable à droite en a et $f'(a) = \lim_{x \to a^+} f'(x)$, en supposant que cette limite est finie.

Réponse : On calcule $\lim_{x \to a^+} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$. Pour chaque $x \in]a, b[$, il existe $c_x \in]a, x[$ tel que $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(c_x)$. La conclusion s'ensuit en utilisant l'hypothèse que la limite $\lim_{x \to a^+} f'(x)$ soit finie.

Exercice 10-105 Soient $a < b$ deux réels. Existe-t-il une fonction dérivable f de $[a, b[$ vers $\mathbb{R}$ telle que l'on ait simultanément le comportement asymptotique $\lim_{x \to b-} f(x) = \infty$ et la majoration $|f'| \leq 1$?

Réponse : Non. En effet, pour tout $a < b_0 < b$, il existe $c \in]a, b_0[$ tel que $f(b_0) - f(a) = f'(c)(b_0 - a)$. En valeur absolue, on obtient $|f(b_0) - f(a)| = |f'(c)||(b_0 - a)| \leq |b_0 - a|$. Par conséquent la valeur de $f(b_0)$ est majorée par $f(a) + |b_0 - a|$. Ceci empêche que $\lim_{x \to b-} f(x) = \infty$.

Exercice 10-106 Soit f de $[0, 1]$ vers $\mathbb{R}$ une application continue sur $[0, 1]$ telle que $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$.

On suppose que f est dérivable en 0 et en 1 et que l'on a $f'(0) = f'(1) = 0$.

1. Montrer qu'il existe un α dans $]0, 1[$ tel que
$$\frac{f(\alpha)}{\alpha} = \frac{f(\alpha) - 1}{\alpha - 1} .$$
   En déduire que $f(\alpha) = \alpha$. [Indication : étudier la fonction $g(x) = \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} - \dfrac{f(1) - f(x)}{1 - x}$.]
2. On suppose de plus que f est deux fois dérivable sur $[0, 1]$. Montrer qu'il existe un β dans $]0, 1[$ tel que $|f''(\beta)| \geq 4$. [Indication : raisonner par l'absurde et étudier les fonctions $x \mapsto f(x) - 2\,x^2$ et $x \mapsto 1 - f(x) - 2\,(1 - x)^2$.]

Réponse : Suivez soigneusement les indications. Pensez à utiliser le théorème des valeurs intermédiaires.

Exercice 10-107 Soit f la fonction définie par $f(x) = x \ln x - x$.

1. En appliquant à f le théorème des accroissements finis, montrer que pour tout $n \geq 1$, on a :
$$\ln n \leq f(n+1) - f(n) \leq \ln(n+1).$$
2. En déduire que pour tout $n \geq 1$, on a :
$$\ln 1 + \ln 2 + \cdots + \ln n \leq f(n+1) + 1 \leq \ln 2 + \ln 3 + \cdots + \ln(n+1).$$

3. En déduire que pour tout $n \geq 1$, on a :

$$e\left(\frac{n}{e}\right)^n \leq n! \leq e\left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1}.$$

Réponse :

1. $f(x)$ est dérivable de dérivée $\ln x$, strictement croissante.
2. On fait la somme de 1 à n de ses inégalités pour obtenir le résultat.
3. On a donc $f(n)+1 < \ln(n!) < f(n+1)+1$, soit l'encadrement désiré en passant à l'exponentielle.