Feuille 4 : Fonctions usuelles

Exercice 4-1 Soit x un réel.

1. Montrer que $1+\sin x = \left(\cos\left(\frac{x}{2}\right)+\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2$.
2. Exprimer les réels $\cos(4x)$ et $\sin(4x)$ en fonction de $\cos x$ et $\sin x$.
3. Exprimer en fonction de $\tan x$ seulement les expressions suivantes :

$$f_1(x)=\cos^2 x \qquad f_2(x)=\frac{\sin^4 x+\cos^4 x}{\sin^4 x-\cos^4 x}$$

$$f_3(x)=\frac{\sin^3 x-\cos^3 x}{\sin x-\cos x} \qquad f_4(x)=\cos^2 x-\sin x\cos x.$$

Exercice 4-2

1. Calculer $\cosh\left(\frac{1}{2}\ln(3)\right)$ et $\sinh\left(\frac{1}{2}\ln(3)\right)$.
2. À l'aide de la formule de calcul du $\cosh(a+b)$, résoudre l'équation d'inconnue réelle x :

$$2\cosh x+\sinh x=\sqrt{3}\cosh(5x).$$

Exercice 4-3 Montrer que pour tous réels u et v, on a :

$$\cosh^2 u+\sinh^2 v=\sinh^2 u+\cosh^2 v=\cosh(u+v)\cosh(u-v)$$
$$\cosh^2 u-\cosh^2 v=\sinh^2 u-\sinh^2 v=\sinh(u+v)\sinh(u-v)$$

Exercice 4-4 Montrer que pour tous réels x et y distincts :

$$e^{\frac{x+y}{2}}<\frac{e^x+e^y}{2}.$$

Exercice 4-5 Calculer là où cela est possible les dérivées des fonctions suivantes :

$$f_1(x)=\ln|\cos x| \quad f_2(x)=\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \quad f_3(x)=\cos^2(3x)$$
$$f_4(x)=e^{2x+1} \quad f_5(x)=\tan(x^2) \quad f_6(x)=\sqrt{1-x^2}$$

Exercice 4-6 Résoudre l'équation suivante, d'inconnue réelle x :

$$3\cosh x-\sinh x-3=0$$

Exercice 4-7 Discuter en fonction de la valeur du réel x l'existence et la valeur éventuelle de la limite de x^n quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 4-8 Calculer les limites quand x tend vers $+\infty$ de :

$$f(x)=e^{-x}(\cosh^3 x-\sinh^3 x) \qquad g(x)=x-\ln(\cosh x).$$

Exercice 4-9

1. Montrer que sinh est une bijection continue de $\mathbf{R}$ vers $\mathbf{R}$.
2. Calculer explicitement la dérivée de la réciproque $\sinh^{-1}$ à partir d'une formule du cours.
3. Calculer explicitement $\sinh^{-1}(y)$ pour y réel et retrouver le résultat du 2.

Concavité, convexité, points d'inflexion

Exercice 4-10 On considère $f(x) = x^3 - 3x^2 + 6x$.

1. Déterminer l'intersection du graphe de f avec l'axe des abscisses.
2. Déterminer les points où le graphe de f admet une tangente horizontale.
3. Montrer que le graphe de f admet un point d'inflexion, puis préciser la concavité de la courbe en fonction de x.

Exercice 4-11 On considère $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$.

1. Déterminer les points où le graphe de f admet une tangente horizontale.
2. Montrer que le graphe de f admet un point d'inflexion, puis préciser la concavité de la courbe en fonction de x.

Études complètes de fonctions

Exercice 4-12 On définit une fonction $f : \mathbf{R} \setminus \{-1\} \to \mathbf{R}$ par :

$$f(x) = \frac{x^2 + 3x + 3}{x + 1}$$

1. Étudier les variations de f.
2. Calculer les limites de f aux bornes de l'ensemble de définition.
3. Calculer les limites en $-\infty$ et en $+\infty$ de l'expression

$$f(x) - (x + 2)$$

   En dduire que la droite d'équation $y = x + 2$ est asymptote au graphe de f.
4. Déterminer la position du graphe de f par rapport à cette asymptote.
5. Tracer le graphe de f.

Exercice 4-13 On note f la fonction définie sur $[0, 1[$ par $f(x) = (1-x)\ln(1-x)+x$ et g la fonction définie sur $]0, 1[$ par $g(x) = -\dfrac{\ln(1-x)}{x}$.

1. Étudier les variations de f sur $[0, 1[$ et en déduire que f est à valeurs positives.
2. Étudier les variations de g sur $]0, 1[$.
3. Déterminer les limites éventuelles de $g(x)$ pour x tendant vers 0 et pour x tendant vers 1.

Exercice 4-14 Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = \left(x + \dfrac{1}{2}\right) e^{-x^2}$.

1. Déterminer les limites éventuelles de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. Étudier les variations de f.
3. Tracer sommairement la courbe représentative de f.

Exercice 4-15 Soit f la fonction définie par :

$$f(u) = \frac{4 - 5\cosh u}{\sinh u}$$

1. Montrer que f est bien définie, continue et dérivable sur $\mathbf{R}^*$. Est-elle paire ? Impaire ?
2. Déterminer les limites éventuelles de f en $+\infty$ et en 0^+.
3. Étudier les variations de f sur $\mathbf{R}^*$. On attend une expression très simple des points d'annulation de f'.
4. Dresser le tableau de variations de f puis tracer son graphe.

Exercice 4-16 Soit f la fonction définie par $f(x) = 2\sin x + \sin(2x)$.

1. Déterminer son ensemble de définition et sa plus petite période, et discuter sa parité. Au vu de ces informations, choisir un intervalle d'étude approprié.
2. Calculer sa dérivée, puis discuter du signe de celle-ci en fonction de x.
3. Dresser le tableau de variations de f.
4. Tracer la courbe représentative de f.

Exercice 4-17 Soit f la fonction définie par $f(x) = x - \frac{\ln x}{x}$.

1. On note g la fonction définie par $g(x) = x^2 - 1 + \ln x$. Dresser le tableau de variations de g, et en déduire qu'il existe un et un seul réel x_0 tel que $g(x_0) = 0$. Déterminer x_0.
2. En déduire les variations de f.
3. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
4. Déterminer les asymptotes au graphe de f.
5. Tracer ce graphe et son asymptote, en veillant à faire figurer les tangentes remarquables.

Exercice 4-101 Établir la formule suivante :

$$\tan(x - y) + \tan(y - z) + \tan(z - x) = \tan(x - y)\tan(y - z)\tan(z - x)$$

dans laquelle x, y et z désignent trois réels pour lesquels les trois tangentes qui figurent dans la formule sont définies.

Exercice 4-102 Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{8\cosh x}{4e^x - 3}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
3. Étudier les variations de f.
4. Dresser le tableau de variations de f.
5. Tracer le graphe de f.

Exercice 4-103 Soit f la fonction définie par :

$$f(u) = \frac{3 + 4\sinh u}{\cosh u}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Calculer les limites de f pour u tendant vers $-\infty$ et $+\infty$.
3. Étudier les variations de f. On attend une expression très simple du point d'annulation de f'.
4. Tracer le graphe de f.

Exercice 4-103 Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \sin^2 x + \frac{1}{2}\cos x$$

1. Déterminer son ensemble de définition et sa plus petite période, et discuter sa parité. Au vu de ces informations, choisir un intervalle d'étude approprié.
2. Montrer qu'il existe un et un seul x_0 dans $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]$ pour lequel $\cos(x_0) = \frac{1}{4}$.
3. Étudier les variations de f sur $[0, \pi]$.
4. Dresser le tableau de variations de f puis tracer son graphe.