

Feuille 5 : Nombres complexes

Exercice 5-1. Calculer la partie réelle et la partie imaginaire des nombres complexes suivants :

- a) $z = 4 + 5i$, b) $z = (-2 + 2i) + (5 + 3i)$, c) $z = (-3 - 7i)(1 - 2i)$,
d) $z = (4 + 5i)(5 + 3i)(1 - 2i)$, e) $z = \frac{4 - 3i}{5 + 2i}$, f) $z = \frac{(4 - 3i)(1 - 2i)}{7 - 3i}$,
g) $z = \frac{(7 + 6i)(-3 - 2i)}{2 + i} + 4 + 6i$.

Exercice 5-2. Calculer la partie réelle et la partie imaginaire de $z = \frac{1 + im}{2m + i(m^2 - 1)}$ pour $m \in \mathbb{R}$.

Exercice 5-3. Soit $z \in \mathbb{C}$. Exprimer le conjugué des nombres complexes suivants en fonction de $Re(z)$ et $Im(z)$:

- a) $z + 1$, b) $z^2 + 3i$, c) $\bar{z} + 2z$, d) $\bar{z} + z - i$,
e) $z^3 + 1$, f) $iz^2 - 3\bar{z}$, g) $z - \bar{z} + iz$, h) $z^2 - i\bar{z} + 4$.

Exercice 5-4.

1. Calculer le module des nombres complexes suivants :

- a) $z = 2 + 5i$, b) $z = -3 + 2i$, c) $z = (3 - 2i)(9 + i)$, d) $z = \frac{2 + 5i}{5 - 2i}$.

2. Exprimer le module des nombres complexes suivants à l'aide du module de z :

- a) $z\bar{z}$, b) $2z^2$, c) $\frac{2}{\bar{z}}$, d) $3\frac{\bar{z}^2}{z}$.

Exercice 5-5. Soit $(z, z') \in \mathbb{C}^2$. Établir la relation $|z + z'|^2 + |z - z'|^2 = 2(|z|^2 + |z'|^2)$ et en donner une interprétation géométrique.

Exercice 5-6.

1. Représenter les points d'affixes suivantes dans le plan $R = (O, \vec{i}, \vec{j})$

- a) $z = 1 - i$, b) \bar{z} , c) $z + \bar{z}$, d) $z - \bar{z}$.

2. Représenter les vecteurs suivants dans le plan $R = (O, \vec{i}, \vec{j})$

- a) \vec{v} d'affixe $2 + i$, b) \vec{w} d'affixe $-3 + 2i$, c) $\vec{v} + \vec{w}$, d) $2\vec{v} - \vec{w}$.

Exercice 5-7. Déterminer l'ensemble des nombres complexes z tels que :

- a) $|1 - z| \leq \frac{1}{2}$ b) $Re(1 - z) \leq \frac{1}{2}$ c) $Re(iz) \leq \frac{1}{2}$ d) $\left|1 - \frac{1}{z}\right|^2 = 2$ e) $\left|\frac{z - 3}{z + 3}\right| < 2$

Exercice 5-8. Soit $x \in \mathbb{R}$.

- Calculer $\cos(3x)$ en fonction de $\cos(x)$, puis $\sin(3x)$ en fonction de $\sin(x)$.
- Linéariser $\sin^4(x)$ puis $\cos(x)\sin^4(x)$.

Exercice 5-9. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Calculer

$$U_n = \sum_{k=0}^n \cos(k\theta) \text{ et } V_n = \sum_{k=0}^n \sin(k\theta)$$

Exercice 5-10.

1. Calculer le module et un argument des nombres complexes suivants :

$$\text{a) } u = -3, \quad \text{b) } v = 1 - i, \quad \text{c) } w = \frac{1 + i\sqrt{3}}{\sqrt{3} + i}, \quad \text{d) } z = \frac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2}.$$

2. En déduire le module et un argument de uw et $\frac{z}{v}$.

Exercice 5-11. Soit $z = \sqrt{2 + \sqrt{3}} + i\sqrt{2 - \sqrt{3}}$.

1. Calculer z^2 , déterminer le module et un argument de z^2 et écrire z^2 sous forme trigonométrique.

2. En déduire le module et un argument de z .

3. En déduire une expression de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

Exercice 5-12.

1. Donner la forme trigonométrique de $(1 + i)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (utiliser la formule de Moivre).

2. En déduire une expression très simple de $(1 + i)^n + (1 - i)^n$.

Exercice 5-13. Soient $z \in \mathbb{C}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Il existe exactement n nombres complexes w vérifiant $w^n = z$. Ces nombres sont appelés les n racines n -ième de z .

1. Représenter dans le plan complexe les 6 racines 6-ième de 1 et les 4 racines 4-ième de -1 .

2. Soit $n \geq 2$ un entier. Déterminer les $n - 1$ racines du polynôme complexe $1 + z + z^2 + \dots + z^{n-1}$.

Exercice 5-14.

1. Déterminer les racines cubiques de 1 et les représenter dans le plan complexe.

2. On note $j = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$. Montrer que $1 + j + j^2 = 0$.

3. Exprimer les racines cubiques de 1 en fonction de j .

Exercice 5-15.

1. Déterminer les racines carrées des nombres complexes suivants :

$$\text{a) } z = 7 + 24i, \quad \text{b) } z = 9 + 40i, \quad \text{c) } z = 1 + i.$$

2. Résoudre dans \mathbb{C} les équations suivantes :

$$\text{a) } z^2 = -2\sqrt{3} + 2i, \quad \text{b) } z^2 = 3 - 4i.$$

Exercice 5-16. Résoudre dans \mathbb{C} les équations suivantes :

$$\text{a) } iz^2 + (1 - 5i)z - 2 + 6i = 0, \quad \text{b) } (1 + 2i)z^2 - (9 + 3i)z + 10 - 5i = 0,$$

$$\text{c) } z^4 + 10z^2 + 169 = 0, \quad \text{d) } z^3 + 3z - 2i = 0,$$

$$\text{e) } z^6 - (3 + 2i)z^3 + 2 + 2i = 0, \quad \text{f) } \bar{z}^7 = \frac{1}{z^2}$$

$$\text{g) } z^5 - z = 0, \quad \text{h) } 27(z - 1)^6 + (z + 1)^6 = 0.$$

Exercice 5-17.

1. Donner les applications de \mathbb{C} qui représentent les transformations du plan suivantes.

a) La translation du vecteur d'affixe $-2 + i$.

b) L'homothétie de rapport 3 et de centre $1 + 2i$.

c) La rotation d'angle $\pi/6$ et de centre 1.

d) La symétrie centrale du centre i .

2. Identifier les transformations suivantes dans le plan complexe .

$$\text{a) } f_1 : z \mapsto z + 3 - 2i. \quad \text{b) } f_2 : z \mapsto e^{i\frac{2\pi}{7}} z. \quad \text{c) } f_3 : z \mapsto e^{i\frac{2\pi}{3}} z - 1. \quad \text{d) } f_4 : z \mapsto 3z - 5 + i.$$

Exercice 5-18. Soit $c \in \mathbb{C}$ tel que $|c| < 1$.

1. Montrer que $|z + c| \leq |1 + \bar{c}z|$ si et seulement si $|z| \leq 1$.
2. On notera $D = \{z \in \mathbb{C}, |z| \leq 1\}$ le disque unité et $C = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$ le cercle unité. Montrer que l'application

$$f: D \rightarrow D \\ z \mapsto \frac{z+c}{1+\bar{c}z}$$

est une bijection pour laquelle $f(C) = C$.

Exercice 5-101. Soit $f: x \mapsto \frac{z^2-1}{z(z+3)}$ définie sur $\mathbb{C} \setminus \{-3, 0\}$. Calculer $f(1-i)$ et $f(1+i)$.

Exercice 5-102. Soit $z = \frac{3}{\sqrt{3}+i}$. Calculer z^4 .

Exercice 5-103.

1. Calculer $\cos^2(x) \sin^3(x)$ en fonction de $\sin(x)$.
2. Linéariser $\cos^4(x)$.

Exercice 5-104.

1. Donner les solutions complexes de $z^4 = 1$.
2. Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $z^4 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.
3. Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $z^8 + \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z^4 - \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = 0$

Exercice 5-105.

1. Déterminer les quatre nombres complexes a, b, c et d différents de 1 qui sont solution dans \mathbb{C} de l'équation $z^5 = 1$.
2. Montrer que pour tout nombre complexe z , on a $1 + z + z^2 + z^3 + z^4 = (z-a)(z-b)(z-c)(z-d)$.

Exercice 5-106. Déterminer l'ensemble des racines n-ièmes des nombres complexes suivants :

- a) $z = e^{i\frac{3\pi}{4}}$ pour $n = 3$, b) $z = e^{i\frac{\pi}{5}}$ pour $n = 4$, c) $z = -1$ pour $n = 5$.

Exercice 5-107. Sachant qu'elle admet une racine réelle, résoudre dans \mathbb{C} l'équation suivante :

$$z^3 + (1-3i)z^2 - (6-i)z + 10i = 0$$

Exercice 5-108. Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $\frac{1}{2}z^6 + (1+3i)z^3 + 8 + 8i = 0$.

Exercice 5-109. On considère l'équation suivante :

$$z^4 - 3z^3 + (2-i)z^2 + 3z - 3 + i = 0 \tag{E}$$

1. Montrer que l'équation (E) admet 2 solutions réelles.
2. Résoudre (E) dans \mathbb{C}

Exercice 5-110. On considère la fonction f suivante :

$$f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \\ z \mapsto z(1-z)$$

1. Déterminer les points fixes de f , c'est à dire résoudre $f(z) = z$.
2. Montrer que si $\left|z - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{2}$, alors $\left|f(z) - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{2}$.

Indication : on pourra remarquer que $z(1-z) = \left(z - \frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{2} - z\right) + \frac{1}{4}$.