Correction Feuille 6 : Suites réelles

Exercice 6-1

1. $u_n = \dfrac{n+2}{2n-1} = \dfrac{n(1+\frac{2}{n})}{n(2-\frac{1}{n})} = \dfrac{1+\frac{2}{n}}{2-\frac{1}{n}}$.

Or $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{2}{n}\right) = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(2-\dfrac{1}{n}\right) = 2$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{1}{2}$.

2. $u_n = \dfrac{3n^2-2n+3}{n^3-1} = \dfrac{n^2(3-\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2})}{n^3(1-\frac{1}{n^3})} = \dfrac{1}{n}.\dfrac{3-\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}}{1-\frac{1}{n^3}}$.

Or $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{3-\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}}{1-\frac{1}{n^3}} = 3$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

3. $u_n = \dfrac{3n^2-5}{n+4} = \dfrac{n^2(3-\frac{5}{n^2})}{n(1+\frac{4}{n})} = n.\dfrac{3-\frac{5}{n^2}}{1+\frac{4}{n}}$.

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{3-\frac{5}{n^2}}{1+\frac{4}{n}} = 3$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

4. $u_n = \dfrac{\sqrt{n+2}}{\sqrt{n-1}} = \dfrac{\sqrt{n(1+\frac{2}{n})}}{\sqrt{n(1-\frac{1}{n})}} = \dfrac{\sqrt{n}\sqrt{1+\frac{2}{n}}}{\sqrt{n}\sqrt{1-\frac{1}{n}}} = \dfrac{\sqrt{1+\frac{2}{n}}}{\sqrt{1-\frac{1}{n}}}$.

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{1}{1} = 1$.

5. $u_n = \dfrac{\sqrt{n+5}+n}{\sqrt{n^2+1}} = \dfrac{n\left(1+\frac{\sqrt{n+5}}{n}\right)}{\sqrt{n^2(1+\frac{1}{n^2})}} = \dfrac{n\left(1+\sqrt{\frac{n+5}{n^2}}\right)}{\sqrt{n^2}\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}$.

$n = \sqrt{n^2}$ car n est positif, donc $u_n = \dfrac{n(1+\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{5}{n^2}})}{n\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} = \dfrac{1+\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{5}{n^2}}}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}$.

On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{1+0}{1} = 1$.

6. $u_n = \sqrt{n+1}-\sqrt{n} = \dfrac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \dfrac{(n+1)-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$.

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

7. Par l'absurde, supposons que la suite $(\sin(n))_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite ℓ_1. On a la formule de trigonométrie suivante $\sin(n+1) = \sin(n)\cos(1)+\cos(n)\sin(1)$.

Donc $\cos(n) = \dfrac{\sin(n+1)-\sin(n)\cos(1)}{\sin(1)}$ car $\sin(1)\neq 0$.

En particulier, la suite $(\cos(n))_n$ converge vers $\ell_2 := \dfrac{\ell_1-\ell_1\cos 1}{\sin(1)}$. On en déduit que la suite $(e^{in})_n$ converge vers $\lambda := \ell_2 + i\ell_1$.

Or $e^{i(n+1)} = e^{in}e^i$ et quand on prend la limite on a $\lambda = \lambda e^i$. Donc $\lambda = 0$.

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{in} = 0$. Par suite, $\lim\limits_{n\to+\infty} |e^{in}| = 0$. C'est absurde car $|e^{in}| = 1$.

En conclusion $(\sin(n))_n$ n'a pas de limite.

8. On a $-1\leq\sin(n)\leq 1$, donc $\dfrac{-1}{\sqrt{n}}\leq\dfrac{\sin(n)}{\sqrt{n}}\leq\dfrac{+1}{\sqrt{n}}$.

Or $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{-1}{\sqrt{n}} = \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{+1}{\sqrt{n}} = 0$. Par le théorème des gendarmes, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\sin(n)}{\sqrt{n}} = 0$.

9. On a $u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \exp\left(n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)$.
Or $\lim\limits_{n\to+\infty} n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}} = \lim\limits_{h\to 0}\frac{\ln(1+h)}{h} = 1$. On a posé $h = \frac{1}{n}$.
Par suite, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = e^1 = e$.

10. $u_n = \frac{n-(-1)^n}{2n+(-1)^n} = \frac{n(1-\frac{(-1)^n}{n})}{n(2+\frac{(-1)^n}{n})} = \frac{1-\frac{(-1)^n}{n}}{2+\frac{(-1)^n}{n}}$.
$\left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \frac{1}{n}$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = 0$, par suite $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{(-1)^n}{n} = 0$.
Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{2}$.

11. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a $u_{2n} = 1$ et $u_{2n+1} = -1$, donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas.

12. $u_n = \frac{3^n-2^n}{2^n-3^n} = (-1)\frac{3^n-2^n}{3^n-2^n} = -1$. Donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est la suite constante égale à -1. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -1$.

13. $u_n = \frac{2^n}{n^{100}} = \frac{\exp(n\ln(2))}{\exp(100\ln(n))} = \exp(n\ln(2) - 100\ln(n)) = \exp\left(n\left(\ln(2) - 100\frac{\ln(n)}{n}\right)\right)$. Or on sait que $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\ln(n)}{n} = 0$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(2) - 100\frac{\ln(n)}{n} = \ln(2) > 0$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

14. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \cos 0 = 1$.

15. On a $|u_n| \leq \frac{1}{n}$. Or $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n} = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty}|u_n| = 0$. Par suite $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

16. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a $u_{4n} = \cos(2n\pi) = 1$ et $u_{4n+1} = \cos\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 0$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{4n} = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{4n} = 0 \neq \lim\limits_{n\to+\infty} u_{4n}$. Ainsi u_n n'a pas de limite.

Exercice 6-2. $u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \ldots + \frac{1}{2n}$.
1. Montrons que la suite (u_n) est croissante :

$$\begin{aligned}
u_{n+1} - u_n &= \left(\frac{1}{(n+1)+1} + \frac{1}{(n+1)+2} + \ldots + \frac{1}{2(n+1)}\right) - \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}\right)\\
&= \left(\frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \ldots + \frac{1}{2n+2}\right) - \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}\right)\\
&= \left(\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2}\right) - \left(\frac{1}{n+1}\right)\\
&= \frac{2(n+1) + 2n+1 - 2(2n+1)}{(2n+1)2(n+1)}\\
&= \frac{2n+2+2n+1-4n-2}{(2n+1)2(n+1)}\\
&= \frac{1}{(2n+1)2(n+1)}
\end{aligned}$$

Donc $u_{n+1} - u_n > 0$, par suite $u_{n+1} > u_n$. On en déduit que la suite (u_n) est croissante.

2. Dans la définition de (u_n), on remarque que le terme le plus grand est $\dfrac{1}{n+1}$ et le terme le plus petit est $\dfrac{1}{2n}$. De plus, u_n est défini comme la somme de n termes. On en déduit l'encadrement

$$\begin{aligned} n\left(\frac{1}{2n}\right) < u_n < n\left(\frac{1}{n+1}\right) \\ \frac{1}{2} < u_n < \frac{n}{n+1} = 1 - \frac{1}{n} < 1 \end{aligned}$$

Donc $\dfrac{1}{2} < u_n < 1$. Comme la suite est croissante et majorée (par 1), elle converge par le théorème de la convergence monotone vers une limite ℓ, et cette limite vérifie $\dfrac{1}{2} \leq \ell \leq 1$.

3. Soit la suite $v_n := \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ définie pour $n \in \mathbb{N}^*$. Par l'absurde, supposons que (v_n) converge vers μ. On a $v_{2n} = v_n + u_n$. En prenant la limite on obtient $\mu = \mu + \ell$. D'où $\ell = 0$. C'est impossible vu l'encadrement de ℓ dans la question 2. On en déduit que (v_n) n'a pas de limite finie. Comme elle est croissante alors $\displaystyle\lim_{n\to\infty} v_n = +\infty$.

Exercice 6-3. $u_n = \dfrac{1}{2}u_{n-1} + 3$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

1. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite arithmético-géométrique car elle est de la forme $u_n = au_{n-1} + b$ avec b et c constantes.

2. $\alpha = \dfrac{1}{2}\alpha + 3 \Longleftrightarrow \dfrac{1}{2}\alpha = 3 \Longleftrightarrow \alpha = 6$.

3. On retranche membre à membre les égalités $u_n = \dfrac{1}{2}u_{n-1} + 3$ et $\alpha = \dfrac{1}{2}\alpha + 3$. On obtient $u_n - \alpha = \dfrac{1}{2}(u_{n-1} - \alpha)$. Ainsi $v_n = \dfrac{1}{2}v_{n-1}$.

4. $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 6 = 8 - 6 = 2$. Par suite $v_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n v_0 = 2\left(\dfrac{1}{2}\right)^n = \dfrac{1}{2^{n-1}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4. $v_n = u_n - \alpha = u_n - 6$. Donc $u_n = v_n + 6 = \dfrac{1}{2^{n-1}} + 6$.
On en déduit $\displaystyle\lim_{n\to\infty} u_n = 6$.

Exercice 6-4. , $\quad u_0 = 1$, $\quad u_{n+1} = \dfrac{u_n + 8}{2u_n + 1}$, $\quad v_n = \dfrac{u_n - 2}{u_n + 2}$.

1.

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \frac{u_{n+1} - 2}{u_{n+1} + 2} = \left(\frac{u_n + 8}{2u_n + 1} - 2\right) \times \frac{1}{\frac{u_n+8}{2u_n+1} + 2} \\ &= \frac{u_n + 8 - 2(2u_n + 1)}{u_n + 8 + 2(2u_n + 1)} \\ &= \frac{-3u_n + 6}{5u_n + 10} \\ &= \frac{-3}{5} \times \frac{u_n - 2}{u_n + 2} \\ &= -\frac{3}{5}v_n \end{aligned}$$

Donc $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $-\dfrac{3}{5}$ et de premier terme $v_0 = \dfrac{u_0-2}{u_0+2} = -\dfrac{1}{3}$.

2. On déduit que $v_n = \left(-\dfrac{3}{5}\right)^n v_0 = -\dfrac{1}{3}\left(-\dfrac{3}{5}\right)^n$.

3. Comme $v_n = \dfrac{u_n-2}{u_n+2}$ alors $v_n(u_n+2) = u_n - 2$ donc $u_n(v_n-1) = -2(v_n+1)$ et ainsi $u_n = \dfrac{-2(v_n+1)}{v_n-1}$. On en déduit $u_n = -\dfrac{2[-\frac{1}{3}(-\frac{3}{5})^n+1]}{-\frac{1}{3}(-\frac{3}{5})^n-1} = 2.\dfrac{3-(-\frac{3}{5})^n}{3+(-\frac{3}{5})^n}$.

4. Comme $-1 < -\dfrac{3}{5} < 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{-3}{5}\right)^n = 0$. On en déduit $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2$.

Exercise 6-5. $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \sqrt{2u_n - 1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

1. Par récurrence, posons P_n : "$u_n > 1$".

Initialisation : Pour $n = 0$ on a bien $u_0 = 2 > 1$. Donc P_0 est vraie.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons P_n vraie, montrons P_{n+1} est vraie. On a $u_{n+1} = \sqrt{2u_n - 1}$ donc par hypothèse de récurrence $u_{n+1} > \sqrt{2\times 1 - 1} = 1$. Ainsi $u_{n+1} > 1$. Donc P_{n+1} est vraie. Ainsi P_n est héréditaire.

Conclusion : Comme P_0 est vraie et que P_n est héréditaire alors P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 1.

2. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \sqrt{2u_n-1} - u_n = \frac{(\sqrt{2u_n-1}-u_n)(\sqrt{2u_n+1}+u_n)}{\sqrt{2u_n+1}+u_n} \\ &= \frac{2u_n - 1 - u_n^2}{\sqrt{2u_n-1}+u_n} \\ &= -\frac{(u_n-1)^2}{\sqrt{2u_n-1}+u_n} < 0 \end{aligned}$$

On en déduit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

3. Comme la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par 1 alors elle converge par le théorème de la convergence monotone. On note ℓ sa limite. On a ℓ qui vérifie la relation de récurrence d'où $\ell = \sqrt{2\ell - 1}$.
$\ell = \sqrt{2\ell-1} \iff \ell^2 = 2\ell - 1 \iff (\ell-1)^2 = 0 \iff \ell = 1$.

Exercise 6-6. $u_0 = 1$ et $u_n = \sqrt{1 + u_{n-1}}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Par récurrence posons P_n : "$0 \leq u_n \leq 2$".

Initialisation : Pour $n = 0$ on a bien $u_0 = 1 \in [0, 2]$. Donc P_0 est vraie.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons P_n vraie, montrons que P_{n+1} est vraie.
On a $u_{n+1} = \sqrt{1+u_n}$. Comme $u_n \geq 0$ alors $1 + u_n \geq 0$. Donc u_{n+1} existe, $u_{n+1} \geq 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{1+u_n} \leq \sqrt{1+2} = \sqrt{3} < 2$. Donc P_{n+1} est vraie et ainsi P_n est héréditaire.

Conclusion : Comme P_0 est vraie et que P_n est héréditaire alors P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. Soit R_n : "$u_n < u_{n+1}$". Montrons que R_n est vraie par récurrence.
R_0 : "$u_0 < u_1$". Donc R_0 : "$1 < \sqrt{2}$". Ainsi R_0 est vraie. Supposons R_n vraie pour $n \in \mathbb{N}$ fixé.
Montrons que R_{n+1} : "$u_{n+1} < u_{n+2}$" est vraie.
Comme R_n est vraie alors $u_n < u_{n+1}$, donc $1 + u_n < 1 + u_{n+1}$ et par suite $\sqrt{1+u_n} < \sqrt{1+u_{n+1}}$.
Ainsi $u_{n+1} < u_{n+2}$. Donc R_{n+1} est vraie.
En conclusion R_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

3. Comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée (par 2) alors par le théorème de convergence monotone, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. On note ℓ sa limite. La limite vérifie la relation de récurrence d'où $\ell = \sqrt{1+\ell}$.
Comme $u_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ alors $\ell \geq 0$.
On a $\ell^2 - \ell - 1 = 0$. $\quad \Delta = 5$.

$\ell_1 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} < 0$. Donc ℓ_1 ne convient pas.
$\ell_2 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} > 0$. Ainsi $\ell = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Exercise 6-7.
1. $u_{n+1} = \dfrac{1}{6}u_n + 5. \qquad u_0 = 3.$
$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmético-géométrique. On utilise la méthode de l'exercice 6-3.
Cherchons $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha = \dfrac{1}{6}\alpha + 5$.
$\alpha = \dfrac{1}{6}\alpha + 5 \Longleftrightarrow \dfrac{5}{6}\alpha = 5 \Longleftrightarrow \alpha = 6.$
Posons $v_n := u_n - \alpha$.
On obtient $v_{n+1} = \dfrac{1}{6}v_n$.
$(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{6}$ et de premier terme $v_0 = u_0 - \alpha = 3 - 6 = -3$.
Donc $v_n := \left(\dfrac{1}{6}\right)^n v_0 = -3\left(\dfrac{1}{6}\right)^n = \dfrac{-3}{6^n}$.
On a $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$.
$v_n = u_n - \alpha$. Donc $u_n = v_n + \alpha = v_n + 6$.
Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 6$.

Pour les questions 2, 3 et 4 nous ne donnons que des indications qui guident l'étude de chaque suite :

2. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmético-géométrique. Voir méthode exercice 6-3.
On trouve que u_n n'a pas de limite.

3. Montrez que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par 0.
En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et que sa limite est $\ell = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

4. Montrez que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée par 4.
En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et que sa limite est 4.

5. $u_{n+1} = u_n^2 + \dfrac{2}{9},\ u_0 = 0.$
a) Montrons par récurrence que $0 \leq u_n \leq \dfrac{1}{3}$ pour tout $n \geq 0$.
Soit $P(n)$: "$0 \leq u_n \leq \dfrac{1}{3}$".
$P(0)$: "$0 \leq u_0 \leq \dfrac{1}{3}$".
$P(0)$ est vrai car $u_0 = 0$.
Supposons que $P(n)$ est vraie pour un entier n donné et montrons que $P(n+1)$ est vraie.
$P(n+1)$: "$0 \leq u_{n+1} \leq \dfrac{1}{3}$".
$u_{n+1} = u_n^2 + \dfrac{2}{9}$ donc $u_{n+1} \geq 0$.
$P(n)$ vraie implique $0 \leq u_n \leq \dfrac{1}{3}$. Donc $u_n^2 \leq \left(\dfrac{1}{3}\right)^2$ c'est à dire $u_n^2 \leq \dfrac{1}{9}$. Donc $u_n^2 + \dfrac{2}{9} \leq \dfrac{1}{9} + \dfrac{2}{9} = \dfrac{3}{9} = \dfrac{1}{3}$.
Comme $u_{n+1} = u_n^2 + \dfrac{2}{9}$ alors $u_{n+1} \leq \dfrac{1}{3}$. Donc $P(n+1)$ est vraie.
En conclusion $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Donc $0 \leq u_n \leq \frac{1}{3}$ pour tout $n \geq 0$.

b) On va montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante par récurrence.
Soit $R(n)$: "$u_n \leq u_{n+1}$".
$R(0)$: "$u_0 \leq u_1$".
$R(0)$: " $0 \leq \frac{2}{9}$ ". Donc $R(0)$ est vraie.
Supposons que $R(n)$ est vraie pour un entier n donné et montrons que $R(n+1)$ est vraie.
$R(n+1)$: "$u_{n+1} \leq u_{n+2}$".
$R(n)$ vraie $\Longrightarrow u_n \leq u_{n+1} \Longrightarrow u_n^2 \leq u_{n+1}^2 \Longrightarrow u_n^2 + \frac{2}{9} \leq u_{n+1}^2 + \frac{2}{9} \Longrightarrow u_{n+1} \leq u_{n+2}$.
Donc $R(n+1)$ est vraie.
En conclusion $R(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

c) D'après ce qui précède $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante et majorée par $\frac{1}{3}$. Donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
Soit ℓ sa limite, $\ell = \lim\limits_{\to+\infty} u_n$.
$u_{n+1} = u_n^2 + \frac{2}{9}$. En passant aux limites on obtient : $\ell = \ell^2 + \frac{2}{9}$.
Comme $0 \leq u_n \leq \frac{1}{3}$ pour tout $n \geq 0$, alors $\ell \in \left[0, \frac{1}{3}\right]$.
$\ell^2 - \ell + \frac{2}{9} = 0$.
$\Delta = 1 - \frac{8}{9} = \frac{1}{9}$.
$\sqrt{\Delta} = \frac{1}{3}$.
$\ell_1 = \frac{1-\frac{1}{3}}{2} = \frac{1}{3} \in \left[0, \frac{1}{3}\right]$.
$\ell_2 = \frac{1+\frac{1}{3}}{2} = \frac{2}{3} \notin \left[0, \frac{1}{3}\right]$. Donc ℓ_2 ne convient pas.
Donc $\ell = \frac{1}{3}$.

6. $u_0 = 2$, $u_1 = \frac{1}{3}$, $u_2 = -\frac{1}{2}$ $u_3 = -3$, $u_4 = 2 = u_0$. Donc les termes vont se répéter. Ainsi la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est périodique. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$u_{4n} = 2$.
$u_{4n+1} = \frac{1}{3}$.
$u_{4n+2} = -\frac{1}{2}$.
$u_{4n+3} = -3$.
La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas convergente.

Exercice 6-8. $\frac{u_n}{1+u_n} = \frac{u_n+1-1}{1+u_n} = 1 - \frac{1}{1+u_n}$.
Donc $\frac{1}{1+u_n} = 1 - \frac{u_n}{1+u_n}$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{1+u_n} = 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{1+u_n} = 1$.
Par suite $\lim\limits_{n\to+\infty} (1+u_n) = 1$, d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Exercice 6-9. La suite $\left(u_{2n}\right)_n$ converge vers $\ell \in \mathbb{R}$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, par hypothèse de croissance, on a

$$u_{2n} \ \le\ u_{2n+1} \ \le\ u_{2n+2}.$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n} = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n+2} = \ell$. D'après le théorème des gendarmes, on obtient $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n+1} = \ell$.
En résumé on a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n} = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n+1} = \ell$. Donc la suite $\left(u_n\right)_n$ est convergente vers ℓ.

Exercise 6-10. $u_0 \in [0,1]$ et $u_n = \dfrac{3-u_{n-1}^2}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
1. $f(x) = \dfrac{3-x^2}{2}$. Notons que $u_{n+1} = f(u_n)$.
1.(a). On a $f'(x) = -x$ donc $f'(x) \le 0$ pour tout $x \in [0,+\infty[$. Ainsi f est décroissante sur $[0,+\infty[$.
1.(b). Soit $x \in [0,\sqrt{3}]$. Alors $f(x) = \dfrac{3-x^2}{2} \ge \dfrac{3-(\sqrt{3})^2}{2} = 0$ et $f(x) = \dfrac{3-x^2}{2} \le \dfrac{3}{2} \le \sqrt{3}$. Ainsi $f(x) \in [0,\sqrt{3}]$. D'où l'intervalle $[0,\sqrt{3}]$ est stable par f.
On en déduit que $0 \le u_n \le \sqrt{3}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
1.(c). $f(\ell) = \ell \iff \dfrac{3-\ell^2}{2} = \ell \iff 3-\ell^2 = 2\ell \iff \ell^2 + 2\ell - 3 = 0$. Il y a 2 solutions : 1 et -3 mais comme $\ell \in [0,+\infty[$ alors $\ell = 1$.
2. On montre par récurrence que la suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
Soit $P(n)$: "$u_{2n} \le u_{2n+2}$".
$P(0)$: "$u_0 \le u_2$".
$u_2 = \dfrac{3-{u_1}^2}{2} = \dfrac{3-(\frac{3-{u_0}^2}{2})^2}{2}$. Posons $x := u_0$. On a $u_2 = \dfrac{3-(\frac{3-x^2}{2})^2}{2} = \dfrac{-x^4+6x^2+3}{8}$.
$P(0) \iff x \le \dfrac{-x^4+6x^2+3}{8} \iff x^4 - 6x^2 + 8x - 3 \le 0$.
Posons $g(x) := x^4 - 6x^2 + 8x - 3$.
$g'(x) := 4x^3 - 12x + 8 = 4(x^3 - 3x + 2) = 4(x-1)(x^2+x-2) = 4(x-1)^2(x+2)$.
Comme $x \in [0,1]$ alors $g'(x) \ge 0$ donc g est croissante, d'où $g(x) \le g(1) = 0$. Ainsi $P(0)$ est vraie.
Supposons $P(n)$ vraie pour n fixé. Etudions $P(n+1)$.
$P(n+1)$: "$u_{2n+2} \le u_{2n+4}$".
Comme $P(n)$ est vraie alors $u_{2n} \le u_{2n+2}$. On sait que f est décroissante sur $[0,+\infty[$. Donc $f(u_{2n}) \ge f(u_{2n+2})$, d'où $u_{2n+1} \le u_{2n+3}$. On applique f de nouveau, on obtient $f(u_{2n+1}) \ge f(u_{2n+3})$. Ainsi $u_{2n+2} \ge u_{2n+4}$. Par suite $P(n+1)$ est vraie.
En conclusion $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donc la suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
Soit $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{2n} \le u_{2n+2}$. Comme f est décroissante alors $f(u_{2n}) \ge f(u_{2n+2})$. Donc $u_{2n+1} \ge u_{2n+3}$. Ainsi la suite $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
3. Par le théorème de convergence monotone comme $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante majorée (par $\sqrt{3}$) et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante minorée (par 0) alors ces deux suites convergent. On note ℓ_1 et ℓ_2 leurs limites respectives : $\ell_1 = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n}$ et $\ell_2 = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n+1}$.
Comme $u_{2n+1} = \dfrac{3-u_{2n}^2}{2}$ et $u_{2n+2} = \dfrac{3-u_{2n+1}^2}{2}$, alors par passage aux limites, on a :
$\ell_2 = \dfrac{3-\ell_1^2}{2}$ et $\ell_1 = \dfrac{3-\ell_2^2}{2}$.
Donc $2\ell_2 = 3-\ell_1^2$ et $2\ell_1 = 3-\ell_2^2$.
Donc $2\ell_2 - 2\ell_1 = (3-\ell_1^2) - (3-\ell_2^2) = \ell_2^2 - \ell_1^2 = (\ell_2-\ell_1)(\ell_2+\ell_1)$.
C'est à dire $2(\ell_2-\ell_1) - (\ell_2-\ell_1)(\ell_2+\ell_1) = 0$.
On a donc $(\ell_2-\ell_1)(2-(\ell_2+\ell_1)) = 0$. Donc $\ell_1 = \ell_2$ ou $\ell_2 + \ell_1 = 2$.
Si $\ell_1 = \ell_2$ alors $\ell_1 = \dfrac{3-\ell_1^2}{2}$, donc $2\ell_1 = 3-\ell_1^2$. Par suite $\ell_1^2 + 2\ell_1 - 3 = 0$, les solutions sont 1 et -3.
Comme $1 \in [0,\sqrt{3}]$ et $-3 \notin [0,\sqrt{3}]$ alors $\ell_1 = 1$ et $\ell_2 = 1$.
Si $\ell_2 + \ell_1 = 2$ alors $\ell_2 = 2-\ell_1$. Comme $\ell_2 = \dfrac{3-\ell_1^2}{2}$ alors $2\ell_2 = 3-\ell_1^2$. Donc $2(2-\ell_1) = 3-\ell_1^2$. Ce

qui donne $4-2\ell_1 = 3-\ell_1^2$.
$\ell_1^2 - 2\ell_1 + 1 = 0$
$(\ell_1 - 1)^2 = 0$, d'où $\ell_1 = 1$, par suite $\ell_2 = 1$.
Dans les deux cas $\ell_1 = \ell_2 = 1$. On en déduit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1.

Exercice 6-11.
1. D'après un théorème du cours, $\big(w_n\big)_n$ converge aussi.
2. Si $\big(w_n\big)_n$ ne converge pas, alors au moins une entre $\big(u_n\big)_n$ et $\big(v_n\big)_n$ ne converge pas (il s'agit juste de la contraposée de l'implication précédente).
Rappel :
(i) La contraposée de $P \Longrightarrow Q$ est $(non\ Q) \Longrightarrow (non\ P)$.
(ii) $P \Longrightarrow Q$ est équivalente à sa contraposée.
3. Il suffit de prendre $u_n = n$ et $v_n = -n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 6-12.
1.
$$w_n \;=\; u_n^2 + 2u_n\frac{1}{2}v_n + \frac{1}{4}v_n^2 + \frac{3}{4}v_n^2 \;=\; \left(u_n + \frac{1}{2}v_n\right)^2 + \frac{3}{4}v_n^2 \,.$$
2. Du point précédent, on déduit que $w_n \geq 0$.
On a
$$0 \;\leq\; \left(u_n + \frac{1}{2}v_n\right)^2 \;\leq\; w_n \qquad (i)$$
et
$$0 \;\leq\; \frac{3}{4}v_n^2 \leq\; w_n$$
c'est à dire
$$0 \;\leq\; v_n^2 \;\leq\; \frac{4}{3}w_n \qquad\qquad (ii)$$
On a $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n \;=0$. Le théorème des gendarmes appliqué à (ii) donne $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n^2 \;=0$ et par suite $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n \;=0$.
De même le théorème des gendarmes appliqué à (i) donne $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(u_n + \frac{1}{2}v_n\right)^2 \;=0$ et par suite $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(u_n + \frac{1}{2}v_n\right) \;=0$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n \;=0$ et que $u_n = \left(u_n + \frac{1}{2}v_n\right) - \frac{1}{2}v_n$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \;=0$.

Exercice 6-13.
1.(a). Par définition de limite, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N_\varepsilon$, on a
$$10-\varepsilon \;\leq\; \frac{u_{n+1}}{u_n} \;\leq\; 10+\varepsilon\,.$$
Alors, il suffit de prendre $\varepsilon = 5$ et $N = N_\varepsilon$, et utiliser le fait que u_n est positif.

2ème méthode :

Comme $\lim\limits_{\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 10$, alors à partir d'un certain rang N, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 5$, c'est à dire :
$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 5.$
Comme $u_n > 0$, alors :
$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_{n+1} \geq 5u_n.$

1.(b). Par récurrence sur $n \geq N$.
Soit $P(n)$: "$u_n \geq 5^{n-N} u_N$".
$P(N)$: "$u_N \geq 5^0 u_N$". Donc $P(N)$ est vraie.
On suppose $P(n)$ vraie pour n fixé.
$P(n+1)$: "$u_{n+1} \geq 5^{n+1-N} u_N$".
On a $u_{n+1} \geq 5u_n \geq 5 \cdot 5^{n-N} u_N = 5^{n+1-N} u_N$. Donc $P(n+1)$ est vraie.
En conclusion $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq N$.
Ainsi pour tout $n \geq N$, $u_n \geq 5^{n-N} u_N$.

2ème méthode :
Pour tout $n \geq N+1$, on a :

$u_{N+1} \geq 5u_N$.
$u_{N+2} \geq 5u_{N+1}$.
$\dots$
$\dots$
$\dots$
$\dots$
$u_n \geq 5u_{n-1}$.

Multiplions ces inégalités membre à membre (en simplifiant mentalement), nous obtenons une nouvelle inégalité :
$u_n \geq 5^p u_N$
où p est le nombre de ces termes : $u_{N+1}, u_{N+2}, \dots u_n$. On a $p = n - (N+1) + 1 = n - N$.
Donc $u_n \geq 5^{n-N} u_N$.
Or pour $n = N$, $u_n = u_N = 5^{n-N} u_N$".
Ainsi pour tout $n \geq N$, $u_n \geq 5^{n-N} u_N$.

1.(c). Il s'agit d'une simple conséquence du point précédent, avec le fait que $u_N > 0$ par hypothèse. En effet : Comme N est fixé alors $\lim\limits_{n \to +\infty} 5^{n-N} = +\infty$. Comme $u_N > 0$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} 5^{n-N} u_N = +\infty$. Or $u_n \geq 5^{n-N} u_N$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

2.(a). On applique encore une fois la définition de limite (comme on a fait au point 1.a. ci-dessus), avec $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$.

2ème méthode :

Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 0$, alors à partir d'un certain rang N, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq \dfrac{1}{2}$, c'est à dire :
$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq \dfrac{1}{2}$.
Comme $u_n > 0$, alors :
$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_{n+1} \leq \dfrac{1}{2} u_n$.

2.(b). En raisonnant comme avant (par exemple par récurrence) , on prouve que $u_n \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-N} u_N$.

Comme N est fixé et que $-1 < \dfrac{1}{2} < 1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-N} = 0$.

Comme $u_N > 0$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-N} u_N = 0$.

Or $0 \leq u_n \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-N} u_N$, donc par le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

Exercice 6-14.

1. On remarque que $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{(n+1)^2}$. Comme $\dfrac{1}{(n+1)^2} > 0$ alors $\big(u_n\big)_n$ est croissante. En utilisant cette propriété, on peut écrire

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= u_{n+1} + \frac{1}{n+1} - u_n - \frac{1}{n} = u_n + \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n+1} - u_n - \frac{1}{n} \\ &= \frac{1}{n\,(n+1)^2}\Big(n + n\,(n+1) - (n+1)^2\Big) = -\frac{2}{n\,(n+1)^2} < 0\,. \end{aligned}$$

Donc $\big(v_n\big)_n$ est décroissante.

2. $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n - u_n) = \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n} = 0$. Comme $\big(u_n\big)_n$ est croissante et $\big(v_n\big)_n$ est décroissante, alors $\big(u_n\big)_n$ et $\big(v_n\big)_n$ sont des suites adjacentes, par suite les deux suites sont convergentes vers la même limite.

Exercice 6-101. On commence par remarquer que, par hypothèse de croissance de $\big(u_n\big)_n$, on a $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$.

$v_n = \dfrac{u_1 + u_2 + \cdots + u_n}{n} \le \dfrac{u_n + u_n + \cdots + u_n}{n} = \dfrac{nu_n}{n} = u_n$. Ainsi $v_n \le u_n \le \ell \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$.

1. En utilisant la définition de v_n, on trouve tout de suite que

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}\right)\sum_{j=1}^{n} u_j + \frac{u_{n+1}}{n+1} = -\frac{1}{n(n+1)}\sum_{j=1}^{n} u_j + \frac{u_{n+1}}{n+1} \\ &= -\frac{v_n}{n+1} + \frac{u_{n+1}}{n+1} \ge \frac{1}{n+1}\left(-u_n + u_{n+1}\right) \ge 0\,, \end{aligned}$$

On a utilisé aussi la propriété $v_n \le u_n$ pour écrire la première inégalité.
On en déduit que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.

2. On a déjà montré que $v_n \le \ell$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, donc $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est majorée. Comme elle est croissante, alors elle converge.

3. On sait que $v_n \le \ell$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Comme $\ell' = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ alors $\ell' \le \ell$. (i)

4.

$$v_{2n} = \frac{1}{2n}\sum_{j=1}^{n} u_j + \frac{1}{2n}\sum_{j=n+1}^{2n} u_j = \frac{1}{2}v_n + \frac{1}{2n}\sum_{j=n+1}^{2n} u_j \ge \frac{1}{2}v_n + \frac{1}{2n}.nu_n = \frac{v_n}{2} + \frac{u_n}{2}.$$

Ainsi $v_{2n} \ge \dfrac{u_n + v_n}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

5. En passant à la limite à droite et à gauche de l'inégalité qu'on vient de montrer, on trouve $\ell' \ge \dfrac{\ell + \ell'}{2}$, par suite $\ell' \ge \ell$. (ii).

(i) et (ii) impliquent $\ell = \ell'$.

Exercice 6-102.

1. $\dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1} = \dfrac{k+1-k}{k(k+1)} = \dfrac{1}{k(k+1)}$.

2. $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n+1}\frac{1}{k} = \frac{1}{1} - \frac{1}{n+1}$.

$u_n = 1 - \dfrac{1}{n+1}\,.$

Cela implique que $\big(u_n\big)_n$ est convergente de limite égale à 1.

Exercice 6-103. $u_0 \in]1,2[$ et $u_{n+1} = \dfrac{u_n^2}{4} + \dfrac{3}{4}$.
1. et 2. Par récurrence, l'initialisation étant vérifiée par hypothèse. Prouvons alors l'hérédité : supposons que $1 < u_n \leq 2$. Cela implique tout de suite que $u_{n+1} > \dfrac{1}{4} + \dfrac{3}{4} = 1$, et que $u_{n+1} \leq \dfrac{1}{4} \cdot 4 + \dfrac{3}{4} \leq 2$.
La propriété est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Par récurrence on montre que $\big(u_n\big)_n$ est décroissante, donc monotone.
Soit $P(n)$: "$u_{n+1} \leq u_n$".
$P(0)$: "$u_1 \leq u_0$".
$P(0) \iff u_1 - u_0 \leq 0 \iff \dfrac{1}{4}u_0^2 + \dfrac{3}{4} - u_0 \leq 0 \iff u_0^2 - 4u_0 + 3 \leq 0 \iff (u_0-1)(u_0-3) \leq 0$.
Comme $u_0 \in]1,2[$ alors la proposition "$(u_0-1)(u_0-3) \leq 0$" est vraie. Par suite $P(0)$ est vraie.
Supposons $P(n)$ vraie pour n fixé.
$P(n+1)$: "$u_{n+2} \leq u_{n+1}$".
$u_{n+2} = \dfrac{u_{n+1}^2}{4} + \dfrac{3}{4} \leq \dfrac{u_n^2}{4} + \dfrac{3}{4} = u_{n+1}$.
Donc $P(n+1)$ est vraie.
En conclusion $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Donc $\big(u_n\big)_n$ est décroissante. Comme elle elle minorée par 1, alors elle converge. Soit ℓ sa limite.
Comme $1 < u_n \leq 2$ alors $\ell \in [1,2]$.
4. En passant à la limite dans la formule définissant u_{n+1}, on trouve $\ell = \dfrac{1}{4}\ell^2 + \dfrac{3}{4}$ ce qui équivaut à $\ell^2 - 4\ell + 3 = 0$. Les solutions sont 3 et 1. Comme $\ell \in [1,2]$ alors $\ell = 1$.

Exercice 6-104.
1. $f'(x) = 2(x-1)$, qui est positive sur $[1,+\infty[$. Maintenant, par croissance, il suffit de calculer $f(1) = 1$ et $f(2) = 2$: on a donc que $f\big(]1,2[\big) =]1,2[$, autrement dit l'intervalle $]1,2[$ est stable par f.
2. Par récurrence.
<u>Initialisation</u>. $u_0 = \dfrac{3}{2}$, donc u_0 appartient à l'intervalle $]1,2[$.
<u>Hérédité</u>. Supposons maintenant que $u_n \in]1,2[$. On a $u_{n+1} = f(u_n)$, et donc, par stabilité de l'intervalle, on a aussi que $u_{n+1} \in]1,2[$.
La propriété est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. On étudie $f(x) - x = x^2 - 3x + 2 = (x-2)(x-1)$, qui est donc toujours strictement négative dans $]1,2[$. On en déduit que $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n < 0$ pour tout n. Par suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante, donc monotone.
4. La suite $\big(u_n\big)_n$ est décroissante et minorée (par 1) donc elle converge. Soit ℓ sa limite. Vu que la suite est décroissante, on a $1 \leq \ell \leq u_0 < 2$. En passant à la limite dans la formule qui définit u_{n+1}, par continuité de f on trouve que ℓ doit être un point fixe de f : $\ell = f(\ell)$.
$\ell = f(\ell) \iff \ell^2 - 3\ell + 2 = 0 \iff \ell = 1$ ou $\ell = 2$. La seule valeur admissible est $\ell = 1$ car $\ell \leq u_0 = \dfrac{3}{2}$.

Exercice 6-105.
1. De la définition de u_{n+1}, on a $u_{n+1} > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donc $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Si la suite converge vers une limite ℓ, alors ℓ doit vérifier $\ell = \dfrac{1}{6}\ell^2 + \dfrac{3}{2}$.
Ce qui équivaut à $\ell^2 - 6\ell + 9 = \big(\ell - 3\big)^2 = 0$.
Donc $\ell = 3$.
3. Il s'agit d'une simple récurrence.
<u>Initialisation</u>. $u_0 < 3$ est vraie car $u_0 = 0$.
<u>Hérédité</u>. Supposons maintenant que $u_n < 3$ pour n fixé. On a

$$u_{n+1} = \frac{1}{6}u_n^2 + \frac{3}{2} < \frac{1}{6}3^2 + \frac{3}{2} = \frac{3}{2}.2 = 3\,.$$

La propriété est alors vraie au rang $n+1$.
En conclusion $u_n < 3$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. Soit $f(x) = \frac{1}{6}x^2 + \frac{3}{2}$. On a

$$f(x) - x = \frac{1}{6}\left(x^2 + 9 - 6x\right) = \frac{(x-3)^2}{6} \geq 0\,.$$

Étant donné que $u_{n+1} = f(u_n)$, on voit tout de suite que u_n est croissante. Comme elle est majorée alors elle admet une limite finie ℓ, qui doit vérifier (par le point 3.) $\ell \leq 3$. Par le point 2., on a donc $\ell = 3$.

Exercice 6-106.
1. $u_0 = 1$, $u_1 = 2$, $u_2 = \frac{3}{2}$ et $u_3 = \frac{5}{3}$.
2. C'est une simple récurrence.
$P(n)$: "$1 \leq u_n \leq 2$".
$P(0)$: "$1 \leq u_0 \leq 2$". Comme $u_0 = 1$ alors$P(0)$ est vraie.
On suppose $P(n)$ vraie pour n fixé.
Etudions $P(n+1)$: "$1 \leq u_{n+1} \leq 2$".
$u_{n+1} = 1 + \frac{1}{u_n}$.
$1 \leq u_n \leq 2 \Longrightarrow \frac{1}{2} \leq \frac{1}{u_n} \leq 1 \Longrightarrow 1 + \frac{1}{2} \leq 1 + \frac{1}{u_n} \leq 1 + 1 \Longrightarrow \frac{3}{2} \leq u_{n+1} \leq 2$. Donc $P(n+1)$ est vraie.
En conclusion $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $1 \leq u_n \leq 2$.
3. Posons $f(x) := 1 + \frac{1}{x}$. On a $f'(x) := -\frac{1}{x^2} < 0$. Donc f est strictement décroissante. Notons que $u_{n+1} = f(u_n)$.
On montre par récurrence que $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
Soit $P(n)$: "$u_{2n} < u_{2n+2}$".
$P(0)$: "$u_0 < u_2$". Comme $u_0 = 1$ et $u_2 = \frac{3}{2}$ alors $P(0)$ est vraie.
Supposons $P(n)$ vraie pour $n \in \mathbb{N}$ fixé.
Montrons que $P(n+1)$: "$u_{2n+2} < u_{2n+4}$" est vraie.
Comme $P(n)$ est vraie alors $u_{2n} < u_{2n+2}$, donc $f(u_{2n}) > f(u_{2n+1})$ car f décroissante. Par suite $u_{2n+1} > u_{2n+3}$. On a $f(u_{2n+1}) < f(u_{2n+3})$, c'est à dire $u_{2n+2} < u_{2n+4}$. Donc $P(n+1)$ est vraie.
En conclusion $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. Comme elle est majorée alors elle converge vers une limite ℓ.
$u_{2n+1} = f(u_{2n})$ et $u_{2n+3} = f(u_{2n+2})$. Comme $u_{2n} < u_{2n+2}$ et que f est décroissante alors $u_{2n+1} > u_{2n+3}$. Donc $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. Comme elle est minorée alors elle converge vers une limite ℓ'.
De la définition de u_{n+1}, on trouve rapidement que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$u_{2n+2} = 1 + \frac{u_{2n}}{1 + u_{2n}} \qquad \text{et} \qquad u_{2n+3} = 1 + \frac{u_{2n+1}}{1 + u_{2n+1}}\,. \tag{1}$$

Donc ℓ et ℓ' sont solutions de l'équation (E) : $x = 1 + \frac{x}{1+x}$.
$(E) \Longleftrightarrow x - 1 = \frac{x}{1+x} \Longleftrightarrow x^2 - 1 = x \Longleftrightarrow x^2 - x - 1 = 0$.
$\Delta = 5$. Les racines de l'équation sont $x_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ et $x_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Or de 2) découle : $\ell, \ell' \in [1,2]$ donc $\ell = \ell' = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.
$\lim_{n\to+\infty}(u_{2n} - u_{2n+1}) = \ell - \ell' = 0$.

On a $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_{2n}-u_{2n+1})=0$. Donc les deux suites $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ sont adjacentes.

4. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n} = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n+1} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ implique $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Exercice 6-107.

1. On pose $u_n := \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n+1}$. On a :

$$u_{n+1}-u_n = \frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}-\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{n+2}-\frac{1}{n} = \frac{-2}{n(n+2)} < 0\,.$$

   Donc $(u_n)_n$ est décroissante.

2. On pose $u_n := n - 2^n$. On a :

$$u_{n+1}-u_n = n+1-2^{n+1}-(n-2^n) = 1-2^n\times 2+2^n = 1+2^n(-2+1) = 1-2^n \leq 1-2^0 = 0\,.$$

   Donc $(u_n)_n$ est décroissante.

3. On pose $u_n := \dfrac{e^n}{n!}$. On a :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{e^{n+1}}{(n+1)!}\times\frac{n!}{e^n} = \frac{e^{n+1-n}}{n+1} = \frac{e}{n+1} < 1 \text{ si } n \geq 3\,.$$

   Donc la suite $(u_n)_n$ est décroissante à partir du rang $N=3$.

4. On pose $u_n := (n+1)(n+2)\dots(n+n)$. On a :

$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{(n+1+1)(n+1+2)\dots(n+1+n-1)(n+1+n)(n+1+n+1)}{(n+1)(n+2)\dots(n+n)}\\ &= \frac{(n+1+n)(n+1+n+1)}{n+1} = \frac{(2n+1)(2n+2)}{n+1} \geq 1\,.\end{aligned}$$

   Donc $(u_n)_n$ est croissante.

5. On pose $u_n := \dfrac{n-1}{n+3}$. On a :

$$u_{n+1}-u_n = \frac{n}{n+4}-\frac{n-1}{n+3} = \frac{n(n+3)-(n-1)(n+4)}{(n+4)(n+3)} = \frac{4}{(n+4)(n+3)} > 0\,.$$

   Donc $(u_n)_n$ est croissante.

6. On pose $u_n := n - sh(n)$. On a :

$$u_{n+1}-u_n = n+1-sh(n+1)-(n-sh(n)) = 1-sh(n+1)+sh(n)\,.$$

   Or $sh(n+1) = sh(n)ch(1)+sh(1)ch(n) \geq sh(n)+sh(1) \geq sh(n)+1$. Ainsi $u_{n+1}-u_n \leq 0$. Donc $(u_n)_n$ est décroissante.

Exercice 6-108.
1. On commence par remarquer la suite d'inégalités suivantes :

$$1 \leq u_n \leq v_n \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}^*\,.$$

On a $u_{n+1} \;=\; u_n \;+\; \dfrac{1}{(n+1)!} \;\geq\; u_n$, donc $\big(u_n\big)_n$ est croissante.
Pour $\big(v_n\big)_n$, on calcule

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n \;&=\; u_{n+1} \;+\; \frac{1}{(n+1)\,(n+1)!} \;-\; u_n \;-\; \frac{1}{n\,n!} \;=\; \frac{1}{(n+1)!} \;+\; \frac{1}{(n+1)\,(n+1)!} \;-\; \frac{1}{n\,n!} \\ &=\; \frac{1}{(n+1)\,n\,(n+1)!}\,\big((n+1)\,n \;+\; n \;-\; (n+1)^2\big) \\ &=\; -\,\frac{1}{(n+1)\,n\,(n+1)!} \;<\; 0\,. \end{aligned}$$

Donc $\big(v_n\big)_n$ est décroissante.

2. $u_1 = 1$ et $v_1 = u_1 + 1 = 2$.
On a

$$u_1 \leq u_n \;\leq\; v_n \;\leq\; v_1\,.$$

Donc

$$1 \leq u_n \;\leq\; v_n \;\leq\; 2\,,$$

$\big(u_n\big)_n$ est croissante et majorée (par 2), donc $\big(u_n\big)_n$ est convergente.

$\big(v_n\big)_n$ est décroissante et minorée (par 1), donc $\big(v_n\big)_n$ est convergente.