

Feuille 6 : Suites réelles

Exercice 6-1

Déterminer les limites éventuelles des suites suivantes, définies par leur terme général.

- | | | | |
|--|--|--|---|
| 1. $u_n = \frac{n+2}{2n-1}$ | 5. $u_n = \frac{\sqrt{n+5}+n}{\sqrt{n^2+1}}$ | 9. $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ | 13. $u_n = \frac{2^n}{n^{100}}$ |
| 2. $u_n = \frac{3n^2-2n+3}{n^3-1}$ | 6. $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ | 10. $u_n = \frac{n - (-1)^n}{2n + (-1)^n}$ | 14. $u_n = \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)$ |
| 3. $u_n = \frac{3n^2-5}{n+4}$ | 7. $u_n = \sin n$ | 11. $u_n = \cos(n\pi)$ | 15. $u_n = (-1)^n \frac{\cos n}{n}$ |
| 4. $u_n = \frac{\sqrt{n+2}}{\sqrt{n-1}}$ | 8. $u_n = \frac{\sin n}{\sqrt{n}}$ | 12. $u_n = \frac{3^n - 2^n}{2^n - 3^n}$ | 16. $u_n = \cos\left(\frac{n}{2}\pi\right)$ |

Exercice 6-2

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de nombres réels définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{2n}.$$

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante.
2. Montrer qu'elle converge et que sa limite ℓ vérifie :

$$\frac{1}{2} \leq \ell \leq 1.$$

3. En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = +\infty$.

Exercice 6-3

On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $u_0 = 8$ et la relation de récurrence $u_n = \frac{1}{2}u_{n-1} + 3$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Comment s'appelle la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$?
2. Résoudre l'équation $\alpha = \frac{1}{2}\alpha + 3$.
3. On considère la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $v_n = u_n - \alpha$. Écrire v_n en fonction de v_{n-1} .
4. Déterminer v_n en fonction de n .
5. Déterminer u_n en fonction de n . Quelle est sa limite ?

Exercice 6-4

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{u_n + 8}{2u_n + 1}.$$

On pose alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_n = \frac{u_n - 2}{u_n + 2}.$$

1. Montrer que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $-\frac{3}{5}$.
2. Exprimer v_n en fonction de n .
3. En déduire l'expression de u_n en fonction de n .
4. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

Exercice 6-5

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \sqrt{2u_n - 1}$.

1. Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est minorée par 1.
2. Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.
3. En déduire que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 6-6

On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $u_0 = 1$ et la relation de récurrence $u_n = \sqrt{1 + u_{n-1}}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq 2$.
2. Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.
3. En déduire que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 6-7

Étudier la convergence et calculer l'éventuelle limite de chacune de ces suites :

1. $u_{n+1} = \frac{1}{6}u_n + 5$, $u_0 = 3$
3. $u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n}$, $u_0 = 8$
5. $u_{n+1} = u_n^2 + \frac{2}{9}$, $u_0 = 0$
2. $u_{n+1} = -2u_n + 1$, $u_0 = 0$
4. $u_{n+1} = \sqrt{4 + 3u_n}$, $u_0 = 2$
6. $u_{n+1} = \frac{u_n - 1}{u_n + 1}$, $u_0 = 2$

Exercice 6-8

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels différents de -1 telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{1 + u_n} = 0$. Montrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$.

Exercice 6-9

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite croissante telle que la sous-suite $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente. Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est aussi convergente.

Exercice 6-10

On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $u_0 \in [0, 1]$ et $u_n = \frac{3 - u_{n-1}^2}{2}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

1. On considère la fonction $f(x) = \frac{3 - x^2}{2}$.
 - (a) Montrer que f est décroissante sur $[0, \infty[$.
 - (b) Montrer que l'intervalle $[0, \sqrt{3}]$ est stable par f .
Quelle conclusion en tirer sur la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$?
 - (c) Trouver $\ell \in [0, +\infty[$ tel que $f(\ell) = \ell$.
2. Montrer que les suites $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ sont respectivement croissante et décroissante.
3. En déduire que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 6-11

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ trois suites telles que $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_n = u_n + v_n$.

1. On suppose que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent. Que peut on dire de $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$?
2. On suppose que $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas. Que peut on dire de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$?
3. Donner un exemple de deux suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ divergentes telles que $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ soit convergente.

Exercice 6-12

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites telles que la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ donnée par $w_n = u_n^2 + u_n v_n + v_n^2$ soit convergente vers 0.

1. En utilisant une identité remarquable, écrire w_n comme la somme de 2 carrés.
2. En déduire que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent aussi vers 0.

Exercice 6-13

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs.

1. On suppose que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 10$
 - (a) Justifier qu'il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N$, $u_{n+1} \geq 5u_n$.
 - (b) Montrer qu'alors, pour tout $n \geq N$, $u_n \geq 5^{n-N} u_N$.
 - (c) En déduire que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.
2. On suppose à présent que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 0$
 - (a) Justifier qu'il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N$, $u_{n+1} \leq \frac{1}{2}u_n$.
 - (b) En raisonnant comme avant, montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge cette fois vers 0.

Exercice 6-14

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ deux suites définies par :

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \quad v_n = u_n + \frac{1}{n}$$

1. Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante et que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante.
2. Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont convergentes.

Exercice 6.101

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite croissante de limite ℓ . On pose

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = \frac{u_1 + \dots + u_n}{n}.$$

1. Montrer que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante.
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n \leq \ell$. En déduire que (v_n) converge.
3. On note ℓ' la limite de (v_n) . Peut-on donner une inégalité entre ℓ et ℓ' ?
4. Établir que $v_{2n} \geq \frac{u_n + v_n}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
5. En passant à la limite dans l'inégalité précédente, en déduire que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers ℓ .

Exercice 6-102

1. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}.$$

2. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite définie pour tout $n > 0$ par

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}.$$

À l'aide de la question 1, montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 6-103

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite réelle définie par $u_0 \in]1, 2[$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = \frac{u_n^2}{4} + \frac{3}{4}$.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 1$.
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq 2$.
3. Montrer que la suite est monotone. En déduire sa convergence.
4. Déterminer sa limite.

Exercice 6-104

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite réelle définie par $u_0 = \frac{3}{2}$ et par la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = (u_n - 1)^2 + 1.$$

1. On introduit la fonction $f(x) = (x - 1)^2 + 1$.
Montrer que f est croissante sur $[1, \infty[$. Déterminer l'image de l'intervalle $]1, 2[$ par f .
2. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}, 1 < u_n < 2$.
3. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est monotone.
4. En déduire que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 6-105

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et par la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{6}u_n^2 + \frac{3}{2}.$$

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*, u_n > 0$.
2. Si la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, quelle peut être sa limite éventuelle ?
3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n < 3$.
4. Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante. Que peut-on en conclure ?

Exercice 6-106

On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $u_0 = 1$ et la relation de récurrence $u_n = 1 + \frac{1}{u_{n-1}}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Calculer u_1, u_2 et u_3 .
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, 1 \leq u_n \leq 2$.
3. Montrer que les suites $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes.
4. Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Exercice 6-107

Étudier la monotonie des suites définies par les termes généraux suivants :

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} \text{ (pour } n \geq 1), \quad n - 2^n, \quad \frac{e^n}{n!}, \quad (n+1)(n+2) \dots (n+n), \quad \frac{n-1}{n+3}, \quad n - \text{sh}(n).$$

Exercice 6-108

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ deux suites définies par :

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \qquad v_n = u_n + \frac{1}{n \cdot n!}$$

1. Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante et que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante.
2. Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont convergentes.