Feuille 7 : Arithmétique

Exercice 7-1 Vrai ou Faux. Etant donnés cinq nombres entiers consécutifs, on trouve toujours parmi eux :

1. Au moins deux multiples de 2 dont un multiple de 4.
2. Exactement un multiple de 5.
3. Au moins un multiple de 6.

Exercice 7-2 Soient a, b et d trois entiers. Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1. Si d divise a et b, alors d divise leur $PGCD$.
2. S'il existe deux entiers u et v tels que $au + bv = d$, alors d divise (a, b).
3. Si $PGCD(a, b)$ divise d, alors il existe un couple d'entiers (u, v), tel que $au + bv = d$

Exercice 7-3 Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n(n + 1)(n + 2)(n + 3)$ est divisible par 24.

Exercice 7-4 Calculer le pgcd de 48 et 210, et de 81 et 237. Dans chaque cas exprimer l'identité de Bézout.

Exercice 7-5 Calculer par l'algorithme d'Euclide le pgcd de 18480 et 9828. En déduire une écriture de 84 comme combinaison linéaire de 18480 et 9828.

Exercice 7-6

1. Déterminer les couples d'entiers naturels premiers entre eux dont le produit est 6.
2. Déterminer les couples d'entiers naturels de pgcd 35 et ppcm 210.
3. Déterminer les couples d'entiers naturels de pgcd 18 et produit 6480.
4. Déterminer les couples d'entiers naturels de pgcd 18 et somme 360.

Exercice 7-7 Démontrer que, si a et b sont des entiers premiers entre eux, il en est de même des entiers $a + b$ et ab.

Exercice 7-8 Soit a et b deux entiers premiers entre eux. On définit une suite (u_n) en posant $u_0 = a$, $u_1 = b$ puis $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ pour tout $n \geq 0$. En effectuant un raisonnement par récurrence, montrer que deux termes consécutifs de cette suite sont premiers entre eux.

Exercice 7-9 Soient a, b des entiers supérieurs ou égaux à 1. Montrer :

1. $(2^a - 1)|(2^{ab} - 1)$;
2. $2^p - 1$ premier $\Rightarrow$ p premier ;

Exercice 7-10 Pour m entier naturel, à quoi peut être égal le reste de la division euclidienne de m par 4 ? En déduire que si n est un entier naturel somme de deux carrés d'entiers alors le reste de la division euclidienne de n par 4 n'est jamais égal à 3.

Exercice 7-11 Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'entier $3^{2n} - 2^n$ est divisible par 7.

Exercice 7-12 Démontrer que le nombre $7^n + 1$ est divisible par 8 si n est impair ; dans le cas n pair, donner le reste de sa division par 8.

Exercice 7-13 Trouver le reste de la division par 13 du nombre 100^{1000}.

Exercice 7-14 Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

1. Montrer que $n^2 \equiv 1 \pmod 8$ si n est impair.
2. Montrer que $n^2 \equiv 0 \pmod 8$ ou $n^2 \equiv 4 \pmod 8$ si n est pair.
3. Soient a, b, c trois entiers impairs.

i) Déterminer le reste modulo 8 de $a^2+b^2+c^2$ et celui de $(a+b+c)^2$. En déduire le reste modulo 8 de $2(ab+bc+ca)$.

ii) Existe-il un entier $m \in \mathbb{N}$ tel que $m^2 = ab+bc+ca$?

Exercice 7-15 L'objectif de l'exercice est de déterminer tous les couples $(m,n) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ solutions de l'équation $(E) \quad 2^m - 3^n = 1$.

1. Soit m un entier supérieur ou égal à 3 et n un entier naturel. En utilisant des congruences modulo 8, montrer que (m,n) n'est pas solution de l'équation (E).
2. Résoudre (E).

Exercice 7-16 Trouver **une** solution dans $\mathbb{Z}$ de l'équation : $5x \equiv 1\,[11]$ puis **toutes** les solutions dans $\mathbb{Z}$ de l'équation : $5x \equiv 0\,[11]$. En déduire **toutes** les solutions dans $\mathbb{Z}$ de l'équation : $5x \equiv 1\,[11]$.

Exercice 7-17 Trouver **une** solution dans $\mathbb{Z}^2$ de l'équation : $58x+21y=1$ puis **toutes** les solutions dans $\mathbb{Z}^2$ de l'équation : $58x+21y=0$. En déduire **toutes** les solutions dans $\mathbb{Z}^2$ de l'équation : $58x+21y=1$.

Exercice 7-18 Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$:

$$(a)\ 1665x+1035y=45 \qquad (b)\ 14x+35y=21 \qquad (c)\ 637x+595y=29.$$

Exercice 7-19 On considère dans $\mathbb{Z}$ les systèmes suivants :

$$(S)\begin{cases} n\equiv 13 & \pmod{19}\\ n\equiv 6 & \pmod{12}\end{cases} \qquad (S_0)\begin{cases} n\equiv 0 & \pmod{19}\\ n\equiv 0 & \pmod{12}\end{cases}$$

Trouver **une** solution du système (S) puis **toutes** les solutions du système (S_0). En déduire **toutes** les solutions du système (S).

Exercice 7-20

1. Déterminer une relation de Bézout entre 7 et 17.
2. Soit a et b deux entiers. On considère dans $\mathbb{Z}$ les systèmes suivants :

$$(S)\begin{cases} n\equiv a & \pmod{17}\\ n\equiv b & \pmod{7}\end{cases} \qquad (S_0)\begin{cases} n\equiv 0 & \pmod{17}\\ n\equiv 0 & \pmod{7}\end{cases}$$

$$(S_1)\begin{cases} n\equiv 1 & \pmod{17}\\ n\equiv 0 & \pmod{7}\end{cases} \qquad (S_2)\begin{cases} n\equiv 0 & \pmod{17}\\ n\equiv 1 & \pmod{7}\end{cases}$$

En utilisant la première question, trouver **une** solution du système (S_1) et **une** solution du système (S_2). En déduire **une** solution du système (S). Déterminer par ailleurs **toutes** les solutions du système (S_0). En déduire **toutes** les solutions du système (S).

Exercice 7-21 Soit X l'ensemble des nombres premiers de la forme $4k+3$ avec $k\in\mathbb{N}$.

1. Montrer que X n'est pas vide.
2. Montrer que le produit de nombres de la forme $4k+1$ est encore de cette forme.
3. On suppose que X est fini et on l'écrit alors $X=\{p_1,\dots,p_n\}$.
   Soit $a = 4p_1p_2\dots p_n - 1$. Montrer par l'absurde que a admet un diviseur premier de la forme $4k+3$.
4. Montrer que ceci est impossible et donc que X est infini.

Exercice 7-22 Soit $a\in\mathbb{N}$ tel que a^n+1 soit premier. Montrer que n est de la forme $n=2^k$ pour un entier $k\in\mathbb{N}$. Que penser de la conjecture : $2^{2^n}+1$ est premier pour tout entier $n\in\mathbb{N}$?

Exercice 7-23

1. Montrer par récurrence que pour tout $n\in\mathbb{N}$ et $k\in\mathbb{N}^\star$ on a :

$$2^{2^{n+k}}-1 = \left(2^{2^n}-1\right)\cdot\prod_{i=0}^{k-1}\left(2^{2^{n+i}}+1\right).$$

2. On pose $F_n = 2^{2^n} + 1$. Montrer que pour $m \neq n$, F_n et F_m sont premiers entre eux.
3. En déduire qu'il y a une infinité de nombres premiers.

Exercice 7-24 Donner la valeur en base dix des nombres suivants :

1. $(110101001)_2$;
2. $(110101001)_3$;
3. $(1367)_8$;
4. $(1402)_5$.

Exercice 7-25 Écrire les nombres suivants (donnés en base dix) dans la base cible indiquée.

1. 255 en base deux ;
2. 1907 en base seize ;
3. 2016 en base sept ;
4. 2000 en base deux mille.

Exercice 7-101 Montrer que pour tout entier n impair, l'entier $n^2 - 1$ est divisible par 8.

Exercice 7-102 Soit n un entier naturel non nul. En utilisant une identité à la Bézout, montrer que $2n+1$ et $9n+4$ sont premiers entre eux. Recommencer avec $3n-2$ et $5n-3$.

Exercice 7-103

1. Quel est le nombre de diviseurs positifs de l'entier 36 ?
2. Soit n un entier naturel non nul. Montrer que le nombre de diviseurs positifs de n^2 est impair.
3. Quel est le nombre de diviseurs positifs de l'entier $15!$?

Exercice 7-104 En France, le numéro d'inscription au répertoire des personnes physiques (le « numéro de sécurité sociale ») est un nombre a qui comporte 13 chiffres en base 10.

La clé associée à un tel nombre a est le reste de la division euclidienne de $-a$ par 97.

1. Montrer que si deux numéros a et b diffèrent sur un chiffre et un seul, ils ont des clés différentes - ce qui permet la détection d'une erreur de transcription simple.
2. Montrer qu'il en est de même pour deux numéros a et b qui diffèrent par transposition de deux chiffres consécutifs.

Exercice 7-105 Soit p un nombre premier impair. On notera $A = \{1, 2, \ldots, \frac{p-1}{2}\}$.

1. Soit x et y deux éléments distincts de A.
   i) Montrer que $2 < x + y < p - 1$ et en déduire que p ne divise pas $x + y$.
   ii) Montrer que p ne divise pas $x - y$.
   iii) Montrer que $x^2 \not\equiv y^2$ modulo p.
   iv) Conclure que les restes des divisions euclidiennes des carrés éléments de A par p sont tous distincts.
2. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $(p-k)^2 \equiv k^2$ modulo p. En déduire que les restes des divisions euclidiennes des carrés des éléments de $\{\frac{p+1}{2}, \ldots, p-2, p-1\}$ par p sont les mêmes que les restes des divisions euclidiennes des carrés des éléments de A par p.
3. Combien de valeurs peut prendre le reste de la division euclidienne d'un carré par p ? Dans l'exemple de $p = 7$, en donner la liste complète.

Exercice 7-106 Soit x et y deux entiers. Expliciter un entier z pour lequel $x^2 - 6xy + 2y^2$ est congru à z^2 modulo 7. En déduire que l'équation $x^2 - 6xy + 2y^2 = 7003$ n'a pas de solutions entières.

Exercice 7-107 Soit p un nombre premier de la forme $4k+3$. Montrer qu'il n'existe pas d'entier naturel n tel que p divise $n^2 + 1$.

Exercice 7-108 Montrer que : $13 \mid 2^{70} + 3^{70}$.

Exercice 7-109 Trouver les deux derniers chiffres du nombre $7^{9^{9^9}}$.

Exercice 7-110 Quel est le reste dans la division par 11 de 1996^{1996} ?

Exercice 7-111 Déterminer les solutions des congruences suivantes :

1) $10x \equiv 25\ [15]$

2) $10x \equiv 35\ [21]$

Exercice 7-112 Montrer que $(2^{22n}-1)(2^{16n}-1) \equiv 0\ \ [391],\ \forall n \in \mathbb{N}$.

Exercice 7-113 Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}\ ,\ \ 19 \mid 2^{2^{6k+2}} + 3$.