Correction Session 1 FDM1 automne 2018

Exercice 1.

On considère la polynôme suivant $A = X^4 + 4X^3 + 8X^2 + 8X + 4$ dans $\mathbb{C}[X]$.

1. Calculer $B = A'/4$, où A' désigne le polynôme dérivée de A.
2. Vérifier par l'algorithme d'Euclide que $pgcd(A, B) = X^2 + 2X + 2$.
3. Montrer en utilisant les deux questions précédentes qu'il existe un polynôme P dans $\mathbb{R}[X]$, de degré 2 tel que : $A = P^2$.
4. En déduire les racines de A dans $\mathbb{C}$.

Correction exercice 1

1.

$$B = \frac{1}{4}(4X^3 + 12X^2 + 16X + 8) = X^3 + 3X^2 + 4X + 2$$

2.

$$\begin{array}{r|l}
X^4 + 4X^3 + 8X^2 + 8X + 4 & X^3 + 3X^2 + 4X + 2 \\ \cline{2-2}
X^4 + 3X^3 + 4X^2 + 2X & X + 1 \\ \cline{1-1}
X^3 + 4X^2 + 6X + 4 & \\
X^3 + 3X^2 + 4X + 2 & \\ \cline{1-1}
X^2 + 2X + 2 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|l}
X^3 + 3X^2 + 4X + 2 & X^2 + 2X + 2 \\ \cline{2-2}
X^3 + 2X^2 + 2X & X + 1 \\ \cline{1-1}
X^2 + 2X + 2 & \\
X^2 + 2X + 2 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}$$

Le dernier reste non nul est $pgcd(A, B) = X^2 + 2X + 2$, qui est bien un polynôme unitaire.

3. Première méthode

Le résultat des deux divisions de la question précédente donne

$$A = (X + 1)B + X^2 + 2X + 2$$

Et

$$B = (X + 1)(X^2 + 2X + 2)$$

On remplace B dans la première égalité

$$A = (X + 1)B + X^2 + 2X + 2 = A = (X + 1)(X + 1)(X^2 + 2X + 2) + (X^2 + 2X + 2)$$
$$= ((X + 1)^2 + 1)(X^2 + 2X + 2) = (X^2 + 2X + 2)(X^2 + 2X + 2) = (X^2 + 2X + 2)^2$$
$$P = X^2 + 2X + 2 \in \mathbb{R}[X]$$

Deuxième méthode

A se divise par $pgcd(A, B)$

$$\begin{array}{r|l}
X^4 + 4X^3 + 8X^2 + 8X + 4 & X^2 + 2X + 2 \\ \cline{2-2}
X^4 + 2X^3 + 2X^2 & X^2 + 2X + 2 \\ \cline{1-1}
2X^3 + 6X^2 + 8X + 4 & \\
2X^3 + 4X^2 + 4X & \\ \cline{1-1}
2X^2 + 4X + 4 & \\
2X^2 + 4X + 4 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}$$

$$A = (X^2 + 2X + 2)^2$$

4. On cherche les racines de P, $\Delta = 4 - 8 = -4 = (2i)^2$

$$X_1 = \frac{-2 - 2i}{2} = -1 - i \qquad \text{et} \qquad X_2 = \frac{-2 + 2i}{2} = -1 + i$$

Donc A admet deux racines doubles $-(1 \pm i)$.

Exercice 2.

On considère deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par récurrence de la façon suivantes :

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad \begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n + 2v_n}{3} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} v_0 = 12 \\ v_{n+1} = \dfrac{u_n + 3v_n}{4} \end{cases}$$

1. Montrer que $(v_n - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $1/12$ dont il faudra préciser également le premier terme.
2. En déduire l'expression de $(v_n - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en fonction de n.
3. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
4. Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
5. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers la même limite.
6. On pose $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $w_n = 3u_n + 8v_n$
   a. Montrer que $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite constante.
   b. En déduire la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Correction exercice 2

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{u_n + 3v_n}{4} - \frac{u_n + 2v_n}{3} = \frac{3(u_n + 3v_n) - 4(u_n + 2v_n)}{12} = \frac{v_n - u_n}{12}$$

Donc $(v_n - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $1/12$ et de premier terme

$$v_0 - u_0 = 12 - 1 = 11$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$v_n - u_n = \left(\frac{1}{12}\right)^n \times 11 = \frac{11}{12^n}$$

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n + 2v_n}{3} - u_n = \frac{u_n + 2v_n - 3u_n}{3} = 2\,\frac{v_n - u_n}{3} = \frac{22}{3 \times 12^n} > 0$$

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{u_n + 3v_n}{4} - v_n = \frac{u_n + 3v_n - 4v_n}{4} = \frac{u_n - v_n}{4} = -\frac{11}{4 \times 12^n} < 0$$

La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

5. On a

$$\lim_{n\to+\infty} (v_n - u_n) = \lim_{n\to+\infty} \frac{11}{12^n} = 0$$

que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, d'après le théorème des suites adjacentes, ces deux suites convergent vers la même limite l.

6.
   a. Pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$w_{n+1} = 3u_{n+1} + 8v_{n+1} = 3\,\frac{u_n + 2v_n}{3} + 8\,\frac{u_n + 3v_n}{4} = u_n + 2v_n + 2(u_n + 3v_n)$$
$$= 3u_n + 8v_n = w_n$$

   La suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante.

   b. D'après a. pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$w_n = w_0 = 3u_0 + 8v_0 = 3 + 8 \times 12 = 99$$

   On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$99 = 3u_n + 8v_n$$

   On fait tendre n vers l'infini

$$99 = 3l + 8l = 11l$$

   D'où on déduit que $l = 9$

Exercice 3.

Soit f la fonction $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3 - x^2}{2} & \text{si} \quad x < 1 \\ \dfrac{1}{x} & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$ et plus particulièrement en 1.
2. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et plus particulièrement en 1.
3. Rappeler le théorème des accroissements finis.
4. Utiliser ce théorème pour montrer qu'il existe $c \in]02[$ tel que : $2f'(c) = f(2) - f(0)$
5. Déterminer toutes les valeurs possible de c.

Correction exercice 3

1. Pour $x < 1$ f est un polynôme donc f est continue, pour $x > 1$, $x \neq 0$ donc $x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue.

   Donc f est continuee sur $\mathbb{R}$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{1}{x} = 1 = f(1) \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{3 - x^2}{2} = 1 = f(1)$$

   Ce qui montre que la fonction est continue en $x = 1$.

   Pour $x < 1$, f est un polynôme donc f est continue, pour $x > 1$, $x \neq 0$ donc $x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue.

   Donc f est continue sur $\mathbb{R}$

2. Première méthode

   Pour $x < 1$:

$$f'(x) = \frac{1}{2}(-2x) = -x$$
$$\lim_{x\to 1^-} f'(x) = \lim_{x\to 1^-} -x = -1$$

   Pour $x > 1$:

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$$
$$\lim_{x\to 1^+} f'(x) = \lim_{x\to 1^+} -\frac{1}{x^2} = -1$$

   Le fait que f soit continue en 1 et que $\lim_{x\to 1^-} f'(x) = \lim_{x\to 1^+} f'(x)$, montre que f est dérivable en $x = 1$.

   Deuxième méthode

   Pour $x < 1$

$$\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{\frac{3 - x^2}{2} - 1}{x - 1} = \frac{3 - x^2 - 2}{2(x - 1)} = \frac{-(x^2 - 1)}{2(x - 1)} = -\frac{(x - 1)(x + 1)}{2(x - 1)} = -\frac{x + 1}{2} \xrightarrow[x\to 1^-]{} -1$$

   Pour $x > 1$

$$\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{\frac{1}{x} - 1}{x - 1} = \frac{1 - x}{x(x - 1)} = -\frac{x - 1}{x(x - 1)} = -\frac{1}{x} \xrightarrow[x\to 1^-]{} -1$$

   Ce qui montre que $\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ admet une limite lorsque x tend vers 1, et que donc f est dérivable.

   Pour $x < 1$ f est un polynôme donc f est dérivable, pour $x > 1$, $x \neq 0$ donc $x \mapsto \frac{1}{x}$ est dérivable.

   Donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$

3. Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$, il existe $c \in]a, b[$ tel que :

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

4. f est continue sur $[0,2]$ et dérivable sur $]0,2[$, on peut appliquer le théorème des accroissements finis sur $[0,2]$ donc il existe $c \in]02[$ tel que : $f(2) - f(0) = (2 - 0)f'(c) = 2f'(c)$.
5.

$$f(2) = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad f(0) = \frac{3 - 0^2}{2} = \frac{3}{2}$$

Par conséquent

$$f(2)-f(0)=(2-0)f'(c) \Leftrightarrow \frac{1}{2}-\frac{3}{2}=2f'(c) \Leftrightarrow f'(c)=-\frac{1}{2}$$

Supposons que $0<c\leq 1$ alors

$$f'(c)=-\frac{1}{2} \Leftrightarrow -c=-\frac{1}{2} \Leftrightarrow c=\frac{1}{2}$$

On vérifie que $0\leq \frac{1}{2}\leq 1$ donc $c=\frac{1}{2}$ est une solution.

Supposons que $1<c<2$ alors

$$f'(c)=-\frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{x^2}=-\frac{1}{2} \Leftrightarrow x^2=2 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{2}$$

On a $-\sqrt{2}\notin]1,2]$ et $\sqrt{2}\in]1,2]$, donc $\sqrt{2}$ est solution, il y a donc deux solutions $c=\frac{1}{2}$ et $c=\sqrt{2}$.

Exercice 4.

1. Exprimer le nombre complexe $z_1=e^{\frac{17i\pi}{6}}$ sous la forme algébrique $\frac{a}{2}+i\frac{b}{2}$ avec a et b réels à déterminer.
2. On considère le nombre complexe $z_2=1+i$.
   a. Montrer que la racine carrée de partie imaginaire positive est
   $$\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}}+i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}$$
   b. Donner le module et un argument de z_2 et écrire z_2 sous forme exponentielle.
   c. En déduire les valeurs de $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ et de $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

Correction exercice 4

1.

$$z_1=e^{\frac{17i\pi}{6}}=e^{\frac{(12+5)i\pi}{6}}=e^{\frac{12i\pi}{6}}e^{\frac{5i\pi}{6}}=e^{2i\pi}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$$

$$a=-\sqrt{3} \quad \text{et} \quad b=1$$

2.

   a. Première méthode (la bonne)

   On cherche $x\in\mathbb{R}$ et $y\in\mathbb{R}^{+*}$ tels que $(x+iy)^2=1+i \quad (*)$

$$(*) \Leftrightarrow x^2-y^2+2ixy=1+i \Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \end{matrix}\begin{cases} x^2-y^2=1 \\ 2xy=1 \end{cases}$$

   D'autre part, en prenant le module dans l'égalité $(*)$

$$|(x+iy)^2|=|1+i| \Leftrightarrow |x+iy|^2=\sqrt{1^2+1^2} \Leftrightarrow x^2+y^2=\sqrt{2} \quad L_3$$

   En faisant la somme de L_3 et de L_1, on trouve que $2x^2=\sqrt{2}+1$ et que donc

$$x=\pm\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}}$$

   En faisant la différence entre L_3 et L_1, on trouve que $2y^2=\sqrt{2}-1$ et que donc, puisque $y\geq 0$,

$$y=\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}$$

   Puis comme d'après L_2, $xy>0$, x est du même signe que y, finalement

$$x+iy=\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}}+i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}$$

   Deuxième méthode

On vérifie aisément que $\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}} > 0$ et on élève au carré

$$\left(\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}\right)^2 = \frac{\sqrt{2}+1}{2} - \frac{\sqrt{2}-1}{2} + 2i\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}}\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{2}+1-(\sqrt{2}-1)}{2} + 2i\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}\frac{\sqrt{2}-1}{2}} = \frac{2}{2} + 2i\sqrt{\frac{\sqrt{2}^2-1^2}{4}} = 1 + \frac{2i}{2}$$

$$= 1 + i$$

b. $|1+i| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$

$$1 + i = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$$

Un argument de z_2 est $\frac{\pi}{4}$.

c. Les racines carrées de z_2 sont

$$\pm(\sqrt{2})^{\frac{1}{2}}e^{i\frac{\pi}{8}} = \sqrt{\sqrt{2}}\left(\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)\right) = \sqrt{\sqrt{2}}\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) + i\sqrt{\sqrt{2}}\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$$

Comme $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) > 0$, on peut identifier $\sqrt{\sqrt{2}}\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) + i\sqrt{\sqrt{2}}\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$ avec la carrée de partie imaginaire positive trouvée au 2.a.

$$\sqrt{\sqrt{2}}\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) + i\sqrt{\sqrt{2}}\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{\sqrt{2}}\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}} \\ \sqrt{\sqrt{2}}\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{2}}}\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}} = \sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}} = \sqrt{\frac{(\sqrt{2}+1)\sqrt{2}}{2\sqrt{2}\sqrt{2}}} \\ \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{2}}}\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}} = \sqrt{\frac{(\sqrt{2}-1)\sqrt{2}}{2\sqrt{2}\sqrt{2}}} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{\frac{(\sqrt{2}+1)\sqrt{2}}{2\sqrt{2}\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \\ \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{\frac{(\sqrt{2}-1)\sqrt{2}}{2\sqrt{2}\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \end{cases}$$