Université Claude Bernard Lyon 1 — UE Fondamentaux des Mathématiques I
Semestre d'automne 2019-2020

Examen final (2 h)

Mercredi 18 décembre 2019

Préambule :
Indiquez sur la copie vos **NOM et PRÉNOM** ainsi que le **NOM DE VOTRE CHARGÉ DE COURS** (M. Pujo-Menjouet, M. Ressayre ou M. Wagner). **TOUTE INFORMATION MANQUANTE SERA SANCTIONNÉE PAR 1 POINT EN MOINS.**
Documents et calculatrices ne sont PAS autorisés durant l'épreuve.
L'usage des téléphones est prohibé.
La justification des réponses et un soin particulier apporté à la présentation sont demandés et seront pris en compte lors de la notation.

Le sujet comporte 4 exercices indépendants.

Exercice 1. *40 minutes*
On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'entiers naturels définie par

$$\begin{cases} u_0 &= 14, \\ u_{n+1} &= 5u_n - 6, \quad n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

1. Calculer u_1, u_2 et u_3.
2. Calculer u_{n+2} en fonction de u_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, en déduire que $u_{n+2} \equiv u_n$ [4].
   (b) Montrer par récurrence sur k, que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u_{2k} \equiv 2$ [4].
   (c) Bonus : en déduire que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u_{2k+1} \equiv 0$ [4].
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer que $u_n = \dfrac{5^{n+2}+3}{2}$.
5. Montrer que pour tout entier $m \geq 2$, $5^m \equiv 25$ [100].
6. En utilisant les deux questions précédentes, en déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2u_n \equiv 28$ [100].
7. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \equiv 14$ [50].
8. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \equiv 14$ [100] ou $u_n \equiv 64$ [100]
9. En utilisant les questions 3 et 8, montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u_{2k} \equiv 14$ [100]
   Bonus : montrer également que $u_{2k+1} \equiv 64$ [100].
10. En déduire que les deux derniers chiffres de u_n sont 14 si n est pair et 64 si n est impair.

Exercice 2. *20 minutes*
Calculer $pgcd(A,B)$ avec $A,B \in \mathbb{R}[X]$ définis par

$$A = X^3 - X^2 - X - 2 \quad \text{et} \quad B = X^5 - 2X^4 + X^2 - X - 2.$$

Exercice 3. *40 minutes*
Considérons l'application $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par par

$$f(x) = e^{1/x}.$$

1. Justifier que cette application est dérivable sur son domaine de définition, et calculer f' sur ce domaine.
2. Montrer que la dérivée f' est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. Rappeler le théorème des accroissements finis.
4. Fixons $x > 0$.
   (a) Utiliser ce théorème pour montrer qu'il existe $c \in]x, x+1[$ tel que
   $$f(x) - f(x+1) = \frac{e^{1/c}}{c^2}.$$
   (b) D'après la question 2, montrer alors que
   $$\frac{e^{1/(x+1)}}{(x+1)^2} \leq \frac{e^{1/c}}{c^2} \leq \frac{e^{1/x}}{x^2}.$$
   (c) En utilisant les deux questions précédentes, montrer que
   $$\frac{x^2 e^{1/(x+1)}}{(x+1)^2} \leq x^2(e^{1/x} - e^{1/x+1)}) \leq e^{1/x}.$$
5. En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2(e^{1/x} - e^{1/(x+1)})$.

Exercice 4. *20 minutes*
Les questions 1 et 2 de cet exercice sont indépendantes.

1. Résoudre $iz^2 + 2z + (1-i) = 0$ dans $\mathbb{C}$.
2. On considère le complexe $z = 1 + i\sqrt{3}$.
   (a) Calculer $z + \bar{z}$ et $z - \bar{z}$.
   (b) Écrire z sous forme exponentielle.
   (c) Calculer $z^5 + \bar{z}^5$.
   (d) Calculer $z^5 - \bar{z}^5$.