Université Claude Bernard Lyon 1 — UE Fondamentaux des Mathématiques I
Semestre d'automne 2019-2020

Seconde Chance (1 h)
Jeudi 16 janvier 2020

Indiquez sur la copie vos **NOM et PRÉNOM** ainsi que le **NOM DE VOTRE CHARGÉ DE COURS** (M. Ressayre ou M. Wagner).
Documents et calculatrices ne sont PAS autorisés durant l'épreuve.
L'usage des téléphones est prohibé.
La justification des réponses et un soin particulier apporté à la présentation sont demandés et seront pris en compte lors de la notation.

Le sujet comporte 4 exercices indépendants.

Exercice 1. On considère la fonction $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ donnée par $f(x) = 3x+4$, ainsi que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'entiers naturels définie par $u_0 = 7$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour $n \in \mathbb{N}$.

1. Calculer le point fixe u de f, c'est-à-dire la solution de l'équation $f(u) = u$.
2. On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donnée par $v_n = u_n - u$.
   (a) Calculer v_0.
   (b) Calculer v_{n+1} en fonction de v_n.
   (c) En déduire que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on déterminera le terme général.
3. En déduire le terme général de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 2. Calculer $pgcd(A,B)$ avec $A, B \in \mathbb{R}[X]$ définis par

$$A = X^3 + 2X^2 - 2X + 3 \quad \text{et} \quad B = X^5 + 2X^4 - 2X^3 + 2X^2 - 2X + 3.$$

Exercice 3. Considérons l'application $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \ln \frac{1}{x}$.

1. Justifier que cette application est dérivable sur son domaine de définition, et calculer f' sur ce domaine.
2. Rappeler le théoréme des accroissements finis.
3. Fixons $x > 0$.
   (a) Utiliser ce théorème pour montrer qu'il existe $c \in]x, x+1[$ tel que $\ln \dfrac{x+1}{x} = \dfrac{1}{c}$.
   (b) En déduire que $\dfrac{1}{x+1} \leq \ln \dfrac{x+1}{x} \leq \dfrac{1}{x}$.
4. En déduire la valeur de la limite $\lim\limits_{x\to+\infty} x \ln \dfrac{x+1}{x}$.

Exercice 4. Résoudre $z^2 - (3+2i)z + (5+5i) = 0$ dans $\mathbb{C}$.