

On en tire deux conséquences

8

théorème Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable. On a l'équivalence entre

(1) f est convexe

(2) f' est croissante sur I

(3) le graphe de f est au-dessus de ses tangentes

$$\left(\forall x, y \in I \quad f(x) \geq f(y) + f'(y)(x-y) \right)$$

théorème Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ deux fois dérivable. On a l'équivalence entre

(1) f est convexe

(2) $f'' \geq 0$

Pour résumer

f convexe "regarde vers le haut"

au-dessus des tangentes

en-dessous des cordes



f concave "regarde vers le bas"

en-dessous des tangentes

au-dessus des cordes



Ex:

B2.2 Toutes les fonctions usuelles

19

• Polys • Fonctions polynomiales

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $a_0, a_1, \dots, a_n$ des réels.

La fonction $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$$x \longmapsto \sum_{k=0}^n a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$$

est une fonction polynomiale de degré n .

Cette fonction est dérivable et sa dérivée est

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = \sum_{k=1}^n k a_k x^{k-1} = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \dots + n a_n x^{n-1}.$$

Cas particuliers

$n=0$ on obtient les fonctions constantes.

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto a_0 \quad (\text{pour } a_0 \in \mathbb{R})$$

Une fonction constante est croissante et décroissante.

Réciproquement, une fonction croissante et décroissante est constante.

$n=1$ on obtient les fonctions affines

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto ax + b \quad (\text{pour } a \in \mathbb{R} \text{ } b \in \mathbb{R})$$

Cette fonction est croissante $\Leftrightarrow a \geq 0$

strictement croissante $\Leftrightarrow a > 0$

Une fonction affine est convexe et concave.

Réciproquement, une fonction convexe et concave est affine.

n=2 Fonctions trinômes

40

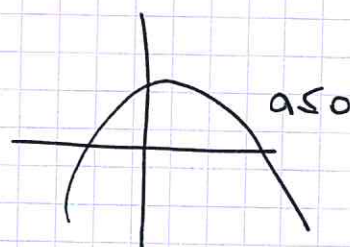
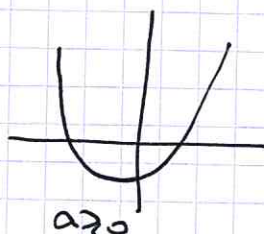
$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$
$$x \mapsto ax^2 + bx + c$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = 2ax + b$$
$$f''(x) = 2a$$

f convexe $\Leftrightarrow a \geq 0$

f concave $\Leftrightarrow a \leq 0$

le graphe de f est une parabole



Fonction partie entière E

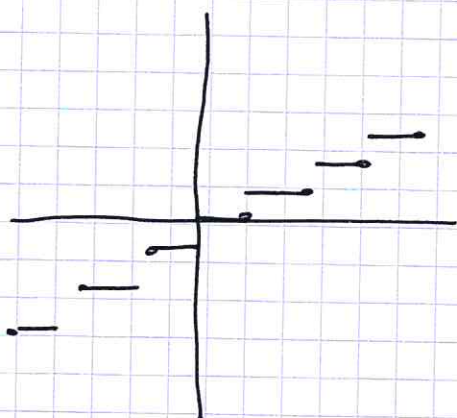
$\forall x \in \mathbb{R}$, il existe un unique entier relatif noté $E(x)$ qui vérifie

$$E(x) \leq x < E(x) + 1.$$

$E(x)$ s'appelle la partie entière de x

$E: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$ est la fonction partie entière

$$x \mapsto E(x)$$



E est croissante

~~pluri-vale~~

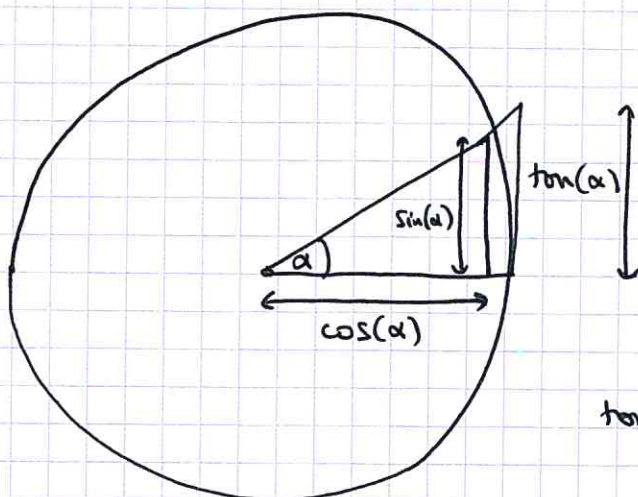
dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ (et de dérivée nulle)

non continue en tout point de $\mathbb{Z}$.

Fonctions trigonométriques



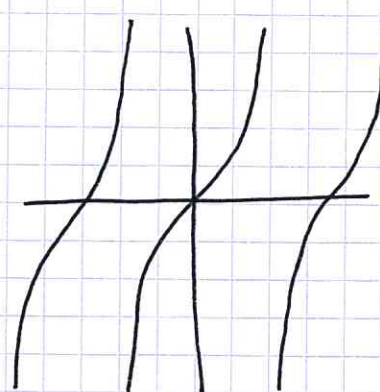
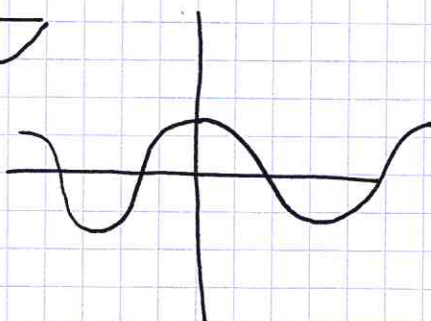
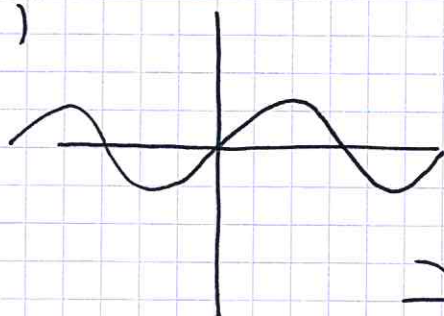
Définition géométrique



$$\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$$

	$x \mapsto \sin(x)$	$x \mapsto \cos(x)$	$x \mapsto \tan(x)$
domaine de définition	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} (2k+1) : k \in \mathbb{Z} \right\}$
parité	impaire	paire	impaire
période	2π	2π	π
dérivée	$x \mapsto \cos(x)$	$x \mapsto -\sin(x)$	$x \mapsto 1 + \tan(x)^2$
primitive (à constante près)	$x \mapsto -\cos(x) + C$	$x \mapsto \sin(x) + C$	$x \mapsto -\ln \cos x $

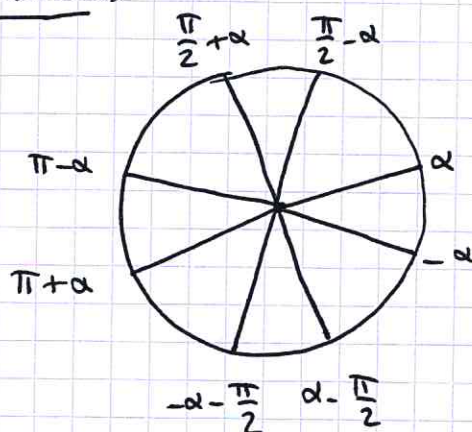
graphe



Il est commode de définir les fonctions sinus et cosinus via l'exponentielle complexe

$$\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \quad \sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

$$e^{ix} = \cos(x) + i \sin(x)$$

Angles associésFormules

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\sin(-x) = -\sin x$$

$$\sin(\pi - x) = \sin x$$

$$\cos(-x) = \cos x$$

$$\cos(\pi - x) = -\cos x$$

$$\sin(\pi + x) = -\sin(x)$$

$$\cos(\pi + x) = -\cos(x)$$

Formules d'addition

$$\begin{cases} \sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b) \\ \cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) \end{cases}$$

"cosinus et
menteur et
raciste".

Cas particulier : $a = b$

$$\sin(2a) = 2\sin(a)\cos a$$

$$\begin{aligned} \cos(2a) &= \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 \\ &= 1 - 2\sin^2 a \end{aligned}$$

d'où on déduit aussi

$$\cos^2 a = \frac{1 + \cos(2a)}{2}$$

$$\sin^2 a = \frac{1 - \cos(2a)}{2}$$

On démontrera ces formules (et d'autres) lors du chapitre sur les nombres complexes

Valeurs remarquables

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos(\theta)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin(\theta)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

→ on pourrait écrire

$$\frac{\sqrt{0}}{2} \quad \frac{\sqrt{1}}{2} \quad \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \frac{\sqrt{4}}{2} !$$

Les valeurs des autres angles classiques s'en déduisent

$$\cos(\pi) = \cos(\pi + 0) = -1$$

$$\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$