

les propriétés suivantes sont vraies dans tous les cas

19

$$1^a = 1 \quad \text{ou} \quad x^a \cdot x^b = x^{a+b} \quad (x^a)^b = x^{ab}$$

$$(xy)^a = x^a y^a \quad x^{-a} = \frac{1}{x^a}$$

La fonction $x \mapsto x^a$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et sa dérivée est $x \mapsto ax^{a-1}$

Preuve

$$f(x) = x^a = \exp(a \ln(x))$$

$$f'(x) = \frac{a}{x} x^a = ax^{a-1}$$

Croissances comparées

les fonctions $x \mapsto \exp(x)$
 $x \mapsto x^n$
 $x \mapsto \log x$ croissent vers l'infini $\rightarrow$ vite ($\exp$)
 $\rightarrow$ lentement ($\log$)

On a le résultat suivant

Théorème $\forall a, b, c$ dans $\mathbb{R}^+$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\exp(ax)}{x^b} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^b}{(\ln x)^c} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\exp(ax)}{(\ln x)^c} = +\infty$$

On introduit un nouveau nombre i et on impose $i^2 = -1$

Un nombre complexe est de la forme $a+ib$ avec $a \in \mathbb{R}$
 $b \in \mathbb{R}$

On note $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes.

L'application $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{C}$ est une bijection
 $(a,b) \longmapsto a+ib$

3. Addition et multiplication dans $\mathbb{C}$

Pour a,b,c,d réels, on pose

$$(a+ib) + (c+id) = (a+c) + i(b+d)$$

$$(a+ib) \cdot (c+id) = (ac-bd) + i(ad+bc)$$

On identifie $\mathbb{R}$ à un sous-ensemble de $\mathbb{C}$ via l'application

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$a \longmapsto a+i0$$

Les opérations $+$ et $\cdot$ vérifient les mêmes propriétés que dans $\mathbb{R}$:
associativité, commutativité, distributivité, élément neutre.

Proposition Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Alors il existe un unique élément de $\mathbb{C}$,
noté z^{-1} , tel que $z \cdot z^{-1} = z^{-1} \cdot z = 1$

Il est donné par la formule $(a+ib)^{-1} = \frac{a-ib}{a^2+b^2}$

Soit $z = a + ib \in \mathbb{C}$.

Alors a s'appelle la partie réelle de z et se note $\operatorname{Re}(z)$
 b _____ imaginaire de z _____ $\operatorname{Im}(z)$

Δ $\operatorname{Im}(z)$ est un nombre réel, malgré son nom.

On appelle conjugué du complexe $z = a + ib$ le nombre

$$\bar{z} = a - ib$$

Propriétés

$\forall z \in \mathbb{C}$

- $\overline{\bar{z}} = z$

- $z = \bar{z} \Leftrightarrow z$ est réel

- $z = -\bar{z} \Leftrightarrow z$ est imaginaire pur (de la forme ib pour $b \in \mathbb{R}$)

$\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

- $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$

- $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$

- $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}$

Module

On définit le module d'un nombre complexe $z = a + ib$ par

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z \bar{z}} \in \mathbb{R}^+$$

Propriétés

Soit $z \in \mathbb{C}$.

(1) Si $z \in \mathbb{R}$, $|z|$ est la valeur absolue de z

(2) Si $z \neq 0$ $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$

(3) Si $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, alors $|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

L'inégalité triangulaire n'étend aux nombres complexes

Théorème Soient z_1 et z_2 des nombres complexes. Alors

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| \quad (*)$$

Preuve

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2|^2 &= (z_1 + z_2) \overline{(z_1 + z_2)} \\ &= (z_1 + z_2) (\overline{z_1} + \overline{z_2}) \quad = \overline{z_1 z_2} \\ &= |z_1|^2 + |z_2|^2 + z_1 \overline{z_2} + \overline{z_1} z_2 \\ &= |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2 \operatorname{Re}(z_1 \overline{z_2}) \end{aligned}$$

$$\leq |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2 |z_1 \overline{z_2}| \quad \text{car } \operatorname{Re}(z) \leq |z| \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

~~$|z|$~~

$$\begin{aligned} &= |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2 |z_1| \cdot |z_2| \\ &= (|z_1| + |z_2|)^2 \end{aligned}$$

d'où $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ en prenant la racine carrée.

Remarque La preuve précédente ne fait intervenir qu'une seule inégalité : $\operatorname{Re}(z_1 \overline{z_2}) \leq |z_1 \overline{z_2}|$

On a donc égalité dans (*) si et seulement si $z_1 \overline{z_2} \in \mathbb{R}^+$,
ce qui équivaut à dire qu'il existe $r \in \mathbb{R}^+$ tel que $z_1 = r z_2$
ou $z_2 = r z_1$.

Considérons le plan $\mathbb{R}^2$ muni d'un repère orthonormé $(0, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$

Soit $z = a + ib \in \mathbb{C}$

On identifie z à un point $\pi(z)$ de $\mathbb{R}^2$ en posant $\pi(z) = (a, b)$
 $= a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2$

$$\pi: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$z \mapsto (\operatorname{Re}(z), \operatorname{Im}(z))$$

On dit que z est l'affixe du point $\pi(z)$
 ou que $\pi(z)$ est le point d'affixe z .

On peut alors interpréter géométriquement certains calculs dans $\mathbb{C}$.
 $\forall z_1, z_2$ dans $\mathbb{C}$

(1) $\overrightarrow{O\pi(z_1+z_2)} = \overrightarrow{O\pi(z_1)} + \overrightarrow{O\pi(z_2)}$

addition dans $\mathbb{C}$
 = addition des vecteurs

(2) $\|\overrightarrow{O\pi(z)}\| = |z|$

module =
 norme (longueur) d'un vecteur

(3) Le point $\pi(\bar{z})$ est l'image
 du point $\pi(z)$ par la symétrie ~~d'axe~~ par rapport à
 l'axe des abscisses

conjugué
 = symétrique miroir

(4) Le point $\pi(iz)$ est l'image
 du point $\pi(z)$ par la rotation de
 centre 0 et d'angle $\frac{\pi}{2}$

multiplication par i
 = rotation d'un
 quart de tour

(5) L'inégalité $|z_1 - z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

est l'inégalité triangulaire dans le triangle $O\pi(z_1)\pi(z_2)$

↓
 longueur d'un côté $\leq$ somme des deux autres longueurs.