~~Argument~~

~~Soit $z \in \mathbb{C}^*$.~~
~~Un nombre~~

Argument

Remarque : si a, b sont des réels tels que

$a^2+b^2=1$, alors il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que

$a = \cos\theta$
$b = \sin\theta$

Un tel θ n'est pas unique : le choix $\theta' = \theta + 2\pi$ convient aussi.
On a pour θ, θ' réels

$$\begin{cases} \cos\theta = \cos\theta' \\ \text{et} \\ \sin\theta = \sin\theta' \end{cases} \iff \exists k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } \theta' = \theta + 2k\pi$$

on écrit $\theta' \equiv \theta \quad [2\pi]$

ou $\theta' \equiv \theta \mod [2\pi]$

et on dit que θ' est congru à θ modulo 2π.

Argument

Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Un nombre $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$
est appelé un <u>argument</u> de z. On note $\arg(z)$

(On applique la remarque précédente avec $a = \mathrm{Re}\left(\frac{z}{|z|}\right) = \frac{\mathrm{Re}(z)}{|z|}$

$b = \mathrm{Im}\left(\frac{z}{|z|}\right) = \frac{\mathrm{Im}(z)}{|z|}$).

On a $\arg(i) = \frac{\pi}{2}$ mais aussi $\arg(i) = -\frac{3\pi}{2}$.

L'argument n'est pas unique. On peut demander qu'il soit unique si on rajoute la condition $\arg(z) \in]-\pi, \pi]$.

Propriété des arguments $\forall z \in \mathbb{C}\ \forall z' \in \mathbb{C}\ \forall n \in \mathbb{N}^*$

1. $\arg(zz') \equiv \arg(z) + \arg(z') \quad [2\pi]$
2. $\arg(z^n) \equiv n \arg(z) \quad [2\pi]$
3. $\arg\left(\frac{1}{z}\right) \equiv -\arg(z) \quad [2\pi]$
4. $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) \equiv \arg(z) - \arg(z') \quad [2\pi]$
5. $\arg(\bar{z}) \equiv -\arg(z) \quad [2\pi]$
6. $\arg(z) \equiv 0 \quad [2\pi] \iff z \in \mathbb{R}^+$

La formule 1. revient aux formules d'addition de sinus et cosinus

Soit θ un argument ~~z~~ de z, θ' un argument de z'

$z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$

$z' = |z'|(\cos\theta' + i\sin\theta')$

$$zz' = |z|.|z'|(\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\theta' + i\sin\theta')$$

$$= |zz'|\left(\cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta' + i(\sin\theta\cos\theta' + \cos\theta\sin\theta')\right)$$

$$= |zz'|\left(\cos(\theta+\theta') + i\sin(\theta+\theta')\right)$$

ce qui montre la formule 1. : $\theta+\theta'$ est un argument de zz'.

2. Soit $P(n)$ la propriété $\arg(z^n) \equiv n\arg(z)$

→ $P(1)$ est vraie

→ Supposons $P(n)$ vraie pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Alors $z^{n+1} = z^n \cdot z$ donc d'après 1.

$$\arg(z^{n+1}) \equiv \arg(z^n) + \arg(z) \quad [2\pi]$$

$$\equiv n\arg(z) + \arg(z) \quad [2\pi] \quad \text{d'après } P(n)$$

$$\equiv (n+1)\arg(z) \quad [2\pi]$$

et la récurrence est complétée $\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*$ $P(n)$ est vraie

Une conséquence est ($z \in \mathbb{C}^*, z' \in \mathbb{C}^*$)

$$\arg(z) = \arg(z') \iff \frac{z'}{z} \text{ est un réel positif.}$$

Remarque : on peut donner une définition commune à l'exponentielle réelle et l'exponentielle complexe. Par exemple

$$e^x = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

est vraie pour $x \in \mathbb{R}$ ou $x = i\theta$, $\theta \in \mathbb{R}$

Notation exponentielle

$\forall \theta \in \mathbb{R}$ on note $e^{i\theta}$ le ~~réel~~ nombre complexe

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i \sin\theta.$$

Formule de MOIVRE $\quad (\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$

en effet ~~se~~ ce nombre complexe a module 1 et argument $n\theta$

qui se réécrit en $\quad (e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$

Application ~~linéariser~~ ~~$\cos^n\theta$ ou $\sin$~~ ~~Formules de linéarisation~~

$$\cos(4\theta) = \mathrm{Re}(e^{i4\theta}) = \mathrm{Re}((e^{i\theta})^4)$$

$$= \mathrm{Re}((\cos\theta + i\sin\theta)^4)$$

$$= \mathrm{Re}(\cos^4\theta + 4i\cos^3\theta\sin\theta - 6\cos^2\theta\sin^2\theta - 4i\cos\theta\sin^3\theta + \sin^4\theta)$$

$$= \cos^4\theta - 6\cos^2\theta\sin^2\theta + \sin^4\theta$$

Conséquence : tout nombre complexe non nul z peut s'écrire

$$z = re^{i\theta} \quad \text{pour } r \in \mathbb{R}_+^*, \ \theta \in \mathbb{R} \qquad r = |z|, \ \theta = \arg(z)$$

si $|z| = 1$ alors $z = e^{i\theta}$

c'est la forme trigonométrique du complexe z.

On a aussi $\quad \cos(\theta) = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \sin(\theta) = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2}$

Les fonctions hyperboliques

A6

7bis

Application : formule de linéarisation

Exemple

$$\cos(\theta)^4 = \left(\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)^4$$

$$= \frac{1}{16}\Big[(e^{i\theta})^4 + 4(e^{i\theta})^3(e^{-i\theta}) + 6(e^{i\theta})^2(e^{-i\theta})^2 + 4(e^{i\theta})(e^{-i\theta})^3 + (e^{-i\theta})^4\Big]$$

$$= \frac{1}{16}\Big[e^{4i\theta}+e^{-4i\theta} + 4\left[e^{2i\theta}+e^{-2i\theta}\right] + 6\Big]$$

$$= \frac{1}{16}\left[2\cos(4\theta) + 8\cos(2\theta) + 6\right]$$

$$= \frac{1}{8}\cos(4\theta) + \frac{1}{2}\cos(2\theta) + \frac{3}{8}$$

Calculs sous forme trigonométrique :

Soient $z = re^{i\theta}$ et $z' = r'e^{i\theta'}$ deux nombres complexes non nuls avec r, r', θ, θ' réels.

Alors

$$zz' = rr'e^{i(\theta+\theta')}$$

$$z^n = r^n e^{in\theta} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{r} e^{-i\theta}$$

$$\bar{z} = re^{-i\theta}$$

Supposons $r, r' > 0$. Alors

$$re^{i\theta} = r'e^{i\theta'} \iff r = r' \text{ et } \theta \equiv \theta' \ [2\pi].$$

Attention cela n'est plus vrai si on ne suppose plus $r, r' > 0$

$$1e^{i\pi} = -1e^{i0} \quad \text{ou encore} \quad \boxed{e^{i\pi} + 1 = 0}$$

très jolie formule !

On a aussi

$$e^{i0} = 1 \qquad e^{i\pi/2} = i \qquad e^{-i\pi/2} = -i$$

$$e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \qquad \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} = 1 + i$$

Racines de l'unité

Théorème Soit $n \in \mathbb{N}^*$. L'équation $z^n = 1$ a n solutions dans $\mathbb{C}$: les nombres $e^{2\pi i \frac{k}{n}}$ pour $0 \leq k \leq n-1$

On les appelle les racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unité.