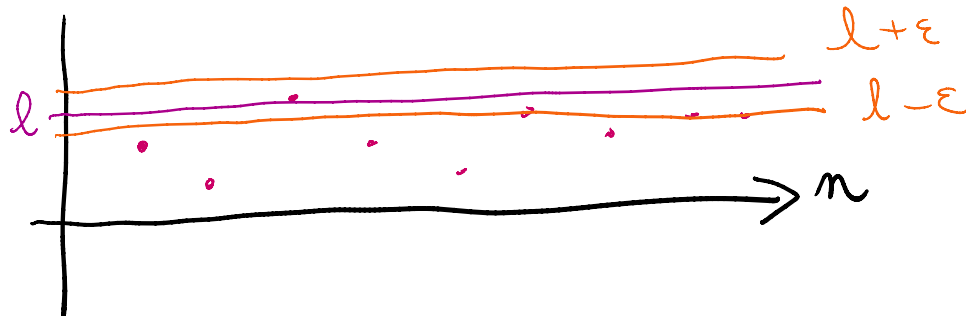


Rappel: (u_n) converge vers $l \in \mathbb{R}$ si
 $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad |u_n - l| \leq \varepsilon$

Rappel: toute suite qui converge est bornée.



Suites et inégalités

Théorème Soient (u_n) et (v_n) 2 suites vérifiant $\begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = l_1 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} v_n = l_2 \end{cases}$
 Si $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leq v_n$, alors $l_1 \leq l_2$

Autrement dit, on peut passer à la limite dans les inégalités larges
 $u_n \leq v_n \Rightarrow \lim u_n \leq \lim v_n$

$\nabla \nexists$ $\forall n \quad u_n < v_n$ n'implique pas $l_1 < l_2$
 (mais seulement $l_1 \leq l_2$)

Ex: $u_n = \frac{1}{n}$ $v_n = \frac{2}{n}$ $u_n < v_n \quad \forall n$
 $\therefore 0 = \lim u_n = \lim v_n = 0$

Ex: $u_n = \frac{1}{n}$ $v_n = \frac{1}{n}$ mais $\lim u_n = \lim v_n = 0$

Preuve: On peut vouloir montrer $l_1 \leq l_2$.
Par l'absurde : on suppose $l_1 > l_2$.
Soit $\varepsilon = \frac{l_1 - l_2}{3}$ (à terminer en exercice ...)



Corollaire Si (u_n) converge vers l

(1)	Si $\forall n$ $u_n \leq M$	alors $l \leq M$
(2)	Si $\forall n$ $u_n \geq m$	alors $l \geq m$

Preuve: on applique le théorème avec une des 2 suites constantes

Théorème "des gendarmes"

Soit $(u_n), (v_n), (w_n)$ 3 suites telles que
 $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leq v_n \leq w_n$
 On suppose que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent vers $l \in \mathbb{R}$.
 Alors $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers l

Exemple Soit pour $n > 0$
 $v_n = \frac{\sin(n)}{n}$

... $-1 \leq 1 \leq 1$

$$v_m = \frac{\sigma(n)}{n}$$

G_n a $\forall n \in \mathbb{N}^k$

Comme $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n}\right) = 0$,

Preuve. Soit $\epsilon > 0$

comme $u_n \rightarrow l$, $\exists N_1 \in \mathbb{N}$

comme $w_n \rightarrow l$, $\exists N_2 \in \mathbb{N}$

Soit $N := \max(N_1, N_2) \quad \forall n \geq N$

on a $n \geq N_1$ et $n \geq N_2$

$$1 - \varepsilon \leq \mu_n$$
 ∇v_n

donc $x_n \in [l - \varepsilon, l + \varepsilon]$

est à dîner

donc $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = l$:

3 hypotheses

- encaissement
- convergence des 2 "gendarmes"
- vers la même limite.

Il existe des suites

A) Conjunctivitis

B) monotone

$$\therefore u_n = \frac{(-1)^n}{n}$$

(par le
th. des
gendarmes)

$$u_n = n^2$$

Théorème :

- Tenth silk

converge

converge.

• sincere

Théorème : • Toute suite croissante majorée converge.
 • Toute suite décroissante minorée converge.

La preuve utilise la propriété de la borne supérieure pour $\mathbb{R}$.

Soit $A \subset \mathbb{R}$. $M \in \mathbb{R}$ est un majorant de A
 si $\forall x \in A \quad x \leq M$

Ex : $A =]-\infty, 0[$ $M=1$ est un majorant de A
 $M=0$ aussi

• la borne supérieure de A est le plus petit des majorants.

Propriété : Toute partie A non vide majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure notée $\sup(A)$
 ⚠ $\sup(A)$ n'est pas forcément dans A

$$A =]-\infty, 0[\quad \sup(A) = 0 \notin A$$

$$B =]0, 1[\quad \sup(B) = 1 \in B$$

De même on définit la borne inférieure de A notée $\inf(A)$ comme le plus grand des mineurs.

Remarque : il n'est pas vrai que toute partie non vide majorée dans $\mathbb{Q}$ admet une borne supérieure dans $\mathbb{Q}$.

Ex $A = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 \leq 2\}$

dans $\mathbb{R} \quad \sup(A) = \sqrt{2}$

dans $\mathbb{Q}$, A n'a pas de borne supérieure.

Preuve • Soit (u_n) une suite croissante et majorée ($\Rightarrow \exists M \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leq M$)

$$A = \{u_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$$

M est un majorant de A . Par la propriété ci-dessus, A admet une borne supérieure, notons-la l . Comme l est un majorant de A

$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leq l$

$\forall \epsilon > 0 \quad l - \epsilon < l$ donc $l - \epsilon$ n'est pas un majorant de A .

$\forall \varepsilon > 0$ $l - \varepsilon < l$ donc $l - \varepsilon$ n'est pas un majorant de A .

Ainsi $\exists N \in \mathbb{N}$ tel que $u_N > l - \varepsilon$.
Comme (u_n) est croissante, on a
 $\forall n \geq N$ $u_n \geq u_N > l - \varepsilon$

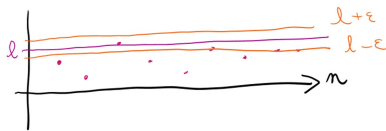
$\forall n \geq N$ $l - \varepsilon \leq u_n \leq l$ donc $|u_n - l| \leq \varepsilon$

• Soit (u_n) une suite croissante majorée et donc $u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} l$.
décroissante minorée. Posons $v_n = -u_n$; alors
 (v_n) est croissante majorée donc converge par
le premier cas : $\exists l \in \mathbb{R} \quad v_n \rightarrow l$
donc $v_n = -u_n \rightarrow -l$.

Cours du 2 novembre

Rappel : (u_n) converge vers $l \in \mathbb{R}$ si
 $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad |u_n - l| \leq \varepsilon$

Rappel : toute suite qui converge
est bornée.



Suites et inégalités

Théorème Soient (u_n) et (v_n) 2
suites vérifiant $\begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = l_1 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} v_n = l_2 \end{cases}$
Si $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leq v_n$, alors $l_1 \leq l_2$

Autrement dit, on peut passer à la
limite dans les inégalités longues
 $u_n \leq v_n \Rightarrow \lim u_n \leq \lim v_n$

$\bigwedge \forall n \quad u_n \leq v_n$ n'implique pas $l_1 \leq l_2$
(mais seulement $l_1 \leq l_2$)

Ex: $u_n = \frac{1}{n}$ $v_n = \frac{2}{n}$ $u_n \leq v_n \quad \forall n$
 $0 = \lim u_n \leq \lim v_n = 0$

Ex: $u_n = \frac{1}{n}$ $v_n = \frac{1}{n}$ $w_n = \frac{1}{n}$ mais $\lim u_n = \lim v_n = 0$

Preuve: On peut se montrer $l_1 \leq l_2$.
Par l'absurde: on suppose $l_1 > l_2$.
Soit $\varepsilon = \frac{l_1 - l_2}{3}$ (à trouver en exercice ...)



Corollaire Si (u_n) converge vers l
(1) Si $\forall n \rightarrow u_n \leq M$ alors $l \leq M$
(2) Si $\forall n \rightarrow u_n \geq m$ alors $l \geq m$
Preuve: on applique le théorème avec une des 2 suites constantes

Théorème "des gendarmes"
Soit $(u_n), (v_n), (w_n)$ 3 suites telles que
 $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leq v_n \leq w_n$
On suppose que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent vers $l \in \mathbb{R}$.
Alors $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers l

Exemple Soit pour $n > 0$
 $v_n = \frac{\sin(n)}{n}$... $-1 \leq \sin(n) \leq 1$

Exemple ... $v_n = \frac{\sin(n)}{n}$
On a $\forall n \in \mathbb{N} \quad -1 \leq \sin(n) \leq 1$
donc $\frac{-1}{n} \leq v_n \leq \frac{1}{n}$
Comme $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{-1}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n}\right) = 0$, $l=0$
le théorème des gendarmes implique $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = 0$.

Preuve: Soit $\varepsilon > 0$
comme $u_n \rightarrow l$, $\exists N_1 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N_1 \quad |u_n - l| < \varepsilon$ (donc $u_n \geq l - \varepsilon$)
comme $w_n \rightarrow l$, $\exists N_2 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N_2 \quad |w_n - l| < \varepsilon$ (donc $w_n \leq l + \varepsilon$)
Soit $N = \max(N_1, N_2) \quad \forall n \geq N$
on a $n \geq N_1$ et $n \geq N_2$ donc
 $l - \varepsilon \leq u_n$ et $w_n \leq l + \varepsilon$
donc $v_n \in [l - \varepsilon, l + \varepsilon]$
c'est à dire $|v_n - l| \leq \varepsilon$
donc $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = l$.

3 hypothèses
- encadrement
- convergence des 2 "gendarmes"
- vers la même limite.

Il existe des suites
A) convergentes non monotones : $u_n = \frac{(-1)^n}{n} \rightarrow 0$ (pr. th. des gendarmes)
B) monotones non convergentes : $u_n = n^2$

Théorème: Toute suite croissante majorée converge.
Toute suite décroissante minorée converge.

Théorème : • Toute suite croissante ^{majorée} converge.
 • Toute suite décroissante ^{minorée} converge.
 La preuve utilise la propriété de la borne supérieure ^{pour R}.

Soit $A \subset \mathbb{R}$. $M \in \mathbb{R}$ est un majorant de A si $\forall x \in A, x \leq M$.
 Ex : $A =]-\infty, 1]$ $M=1$ est un majorant de A .
 $M=0$ n'est pas un majorant de A .

la borne supérieure de A , est le plus petit des majorants.
Propriété : Toute partie A non vide majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure notée $\sup(A)$.
 $\sup(A)$ n'est pas forcément dans A .

Ex : $A =]-\infty, 0]$ $\sup(A) = 0 \notin A$
 $B =]0, 1]$ $\sup(B) = 1 \in B$
 De même on définit la borne inférieure de A notée $\inf(A)$ comme le plus grand des mineurs.

Remarque : il n'est pas vrai que toute partie non vide majorée dans $\mathbb{Q}$ admet une borne supérieure dans $\mathbb{Q}$.
 Ex : $A = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 \leq 2\}$.

Preuve : Soit (u_n) une suite croissante et majorée ($\Rightarrow \exists M \in \mathbb{R} \forall n \in \mathbb{N} u_n \leq M$).
 $A = \{u_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$. M est un majorant de A .
 Par la propriété ci-dessus, A admet une borne supérieure, notons-la l . Comme l est un majorant de A , $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq l$.
 $\forall \epsilon > 0, l - \epsilon < l$ donc $l - \epsilon$ n'est pas un majorant de A .

$\forall \epsilon > 0, l - \epsilon < l$ donc $l - \epsilon$ n'est pas un majorant de A .

Ainsi $\exists n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n > l - \epsilon$.
 Comme (u_n) est croissante, on a $u_n \geq u_N > l - \epsilon$ $\forall n \geq N$.
 $\forall n \geq N, l - \epsilon \leq u_n \leq l$ donc $|u_n - l| < \epsilon$.

et donc $u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} l$.
 • Soit (v_n) une suite décroissante minorée. Posons $u_n = -v_n$; alors (u_n) est croissante majorée donc converge par le premier cas : $\exists l \in \mathbb{R} u_n \rightarrow l$.
 donc $v_n = -u_n \rightarrow -l$.