

Thm toute suite croissante majorée converge
toute suite décroissante minorée converge

Suites adjacentes

Théorème des suites adjacentes

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles telles que

- (i) $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante
- (ii) $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante
- (iii) $(v_n - u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0

Alors les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent vers la même limite l ($\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} v_n = l$)
et $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_n \leq l \leq v_n$



Remarque Si on sait que (u_n) et (v_n) convergent, alors (iii) implique $\lim u_n = \lim v_n$
mais (ii) ne suffit pas à impliquer la convergence de (u_n) et (v_n)

Ex: $u_n = n$ $v_n = n + \frac{1}{n}$ (ii) n'est pas vérifié
 $v_n - u_n = \frac{1}{n} \rightarrow 0$
mais (u_n) et (v_n) divergent.



Si on suppose $\lim_{n \rightarrow \infty} (v_n - u_n) = 0$ on n'a pas le droit d'en déduire $\lim_{n \rightarrow \infty} (v_n - u_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} v_n - \lim_{n \rightarrow \infty} u_n$ si on n'a pas montré la convergence.

Preuve Soit $w_n = v_n - u_n$; (w_n) est décroissante
(somme de 2 suites décroissantes: (v_n) et $(-u_n)$).

(iii) implique $\lim_{n \rightarrow \infty} w_n = 0$.

Comme (w_n) décroît vers 0, on a $w_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.
donc $u_n \leq v_n$.

(iii) implique $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$.
 Comme (u_n) décroît vers 0, on a $u_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.
 donc $u_n \leq v_n$.

$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_0 \leq u_n \leq v_n \leq v_0 \quad (*)$
 Donc les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont bornées.
 Comme elles sont aussi monotones, elles sont
 convergentes par le théorème précédent.

Posons $l_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n \quad l_2 = \lim_{n \rightarrow \infty} v_n$

$$\text{Alors } 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} w_n = \lim_{n \rightarrow \infty} v_n - \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = l_2 - l_1$$

Donc $l_1 = l_2$.

Par $(*) \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leq v_n$
 d'où en passant à la limite d'un côté
 $u_n \leq l$ ou $l \leq v_n$.

Exemple: Moyenne arithmético-géométrique
 $a, b > 0$
 $\frac{a+b}{2}$ moyenne "arithmétique" (nouvelle)
 $\sqrt{ab}$ moyenne "géométrique"

$$\text{On a } \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \quad (*) \quad \text{car } (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$$

$$(\sqrt{a})^2 - 2\sqrt{a}\sqrt{b} + (\sqrt{b})^2$$

$$\text{donc } a - 2\sqrt{ab} + b \geq 0$$

$$\text{ou } a+b \geq 2\sqrt{ab}$$

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

Soit $a, b > 0$ avec $a \leq b$
 On définit deux suites (u_n) et (v_n) par récurrence

$$\text{On pose } \begin{cases} u_0 = a \\ v_0 = b \end{cases} \quad \text{et } \forall n \in \mathbb{N} \quad \begin{cases} u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \\ v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \end{cases}$$

Montrons que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes.

- (i) (u_n) croissante?
- (ii) (v_n) décroissante?

$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leq v_n$: car $n=0$ c'est car $a \leq b$
 sinon c'est l'inégalité $(*)$
 appliquée à $a = u_n$ et $b = v_n$

$$\text{donc } u_n v_n \geq u_n^2 \quad (\text{car } u_n \geq 0)$$

$$\text{donc } u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \geq \sqrt{u_n^2} = u_n \Rightarrow u_n \leq u_{n+1}$$

$$\cdot \frac{u_n + v_n}{2} \leq \frac{v_n + v_n}{2} = v_n$$

$$\text{donc } v_{n+1} \leq v_n.$$

$$(iii) \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad v_{n+1} - u_{n+1} \leq v_{n+1} - u_n \quad (\text{car } u_n \leq u_{n+1})$$

$$= \frac{u_n + v_n}{2} - u_n = \frac{v_n - u_n}{2}$$

$$\boxed{v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{v_n - u_n}{2}}$$

$$\text{On en déduit } \forall n \in \mathbb{N} \quad v_n - u_n \leq \frac{b-a}{2^n} \quad (P_n)$$

$$\text{car } v_0 - u_0 = b - a = \frac{b-a}{2^0}$$

$$\text{donc } (P_0) \text{ est vraie}$$

$$\text{Si on suppose } P_n \text{ vraie} \quad (P_n)$$

$$\text{alors } v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{v_n - u_n}{2} \leq \frac{b-a}{2^n} = \frac{b-a}{2^{n+1}}$$

alors P_{n+1} est vraie.

Ainsi par récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}$ P_n est vraie

$$\text{On a } 0 \leq v_n - u_n \leq \frac{b-a}{2^n}$$

$$\begin{matrix} (n \rightarrow \infty) \downarrow & & \downarrow (n \rightarrow \infty) \\ 0 & & 0 \end{matrix}$$

Par le théorème des gendarmes, $\lim_{n \rightarrow \infty} (v_n - u_n) = 0$

Ainsi (u_n) et (v_n) vérifient (i) (ii) (iii) - ce sont des suites adjacentes qui convergent donc vers la même limite l .

↑
s'appelle la
moyenne arithmético-géométrique
de a et b .

3) Suites extraites ou sous-suites :

suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$; on ne garde que

3)

Subs. ex. 11.10

Principe

on a une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$; on ne garde que certains termes de la suite pour former une nouvelle suite qu'on appelle suite extraite ou sous-suite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

avec une infinité de termes

Ex

$(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$

est une sous-suite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$

$(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$

$(u_{3n})_{n \in \mathbb{N}}$

Définition

Une extraction est une fonction $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante.

Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite et φ est une extraction,

la suite $(u_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite extraite ou une sous-suite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Propriétés

Si (u_n) est croissante, alors $(u_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante

_____ décroissante

_____ majorée

_____ minorée

_____ vers l .

Si (u_n) converge vers l , alors $(u_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers l .

