Cours du 6 novembre

vendredi 6 novembre 2020 08:26

Rappel $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite

Une suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$

où $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est une extraction
= fonction strictement croissante.

Si $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = l$ alors $\lim\limits_{n\to\infty} u_{\varphi(n)} = l$ (exercice)

⚠ Même quand $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas, certaines des suites extraites peuvent converger.

$u_0 = u_2 = u_4 = 1$
$u_1 = u_3 = u_5 = -1$

Ex : $u_n = (-1)^n$ ne converge pas $(u_n) = (1, -1, 1, -1, 1, -1 \dots)$

mais $u_{2n} = 1$ donc $\lim\limits_{n\to\infty} u_{2n} = 1$

$u_{2n+1} = -1$ $\lim\limits_{n\to\infty} u_{2n+1} = -1$

pair

impair

Proposition Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite. Alors

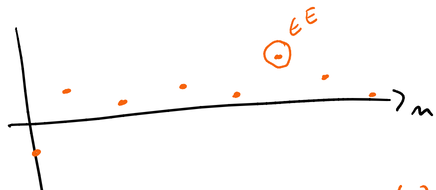
(u_n) converge $\Leftrightarrow$ les suites (u_{2n+1}) et (u_{2n}) convergent vers la même limite.

$\Rightarrow$ conséquence de l'exercice précédent

$\Leftarrow$ exercice

THÉORÈME de RAMSEY : Toute suite admet une sous-suite monotone.

Preuve Soit (u_n) une suite



$$E = \{ n \in \mathbb{N} : \forall m > n \quad u_m \leq u_n \}$$

$\max(E)$ $\shortparallel$

1er cas E est fini, donc borné par un entier N.

$(*)$ $\forall n > N$ $n \notin E$: $\exists m > n$ $u_m > u_n$

On définit alors $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante

$\varphi(0) = N+1$ et par récurrence :

étant donnés $\varphi(0) < \varphi(1) < \dots < \varphi(k)$,

on choisit $\varphi(k+1)$ tel que $u_{\varphi(k+1)} > u_{\varphi(k)}$

(possible par $(*)$ car $\varphi(k) > N$ donc $\varphi(k) \notin E$).

On a donc construit une extraction φ telle que $\forall k \in \mathbb{N}$ $u_{\varphi(k)} < u_{\varphi(k+1)}$

La sous-suite $(u_{\varphi(n)})_n$ est (strictement) croissante

$\boxed{\text{2ème cas : } E \text{ est infini}}$. On peut l'écrire

$E = \{ \varphi(0) < \varphi(1) < \varphi(2) < \dots \}$ pour une extraction φ

$\varphi(k) < \varphi(k+1)$

2ème cas : E est infini). On peut ...
$E = \{\varphi(0) < \varphi(1) < \varphi(2) < \dots\}$ pour une extraction φ $< \varphi(k+1)$

donc $\forall k \in \mathbb{N}$ $\varphi(k) \in E$ et $\varphi(k+1) > \varphi(k)$ donc par définition de E $u_{\varphi(k+1)} \leq u_{\varphi(k)}$ et donc $(u_{\varphi(n)})$ est une sous-suite décroissante de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

THÉORÈME de BOLZANO-WEIERSTRASS

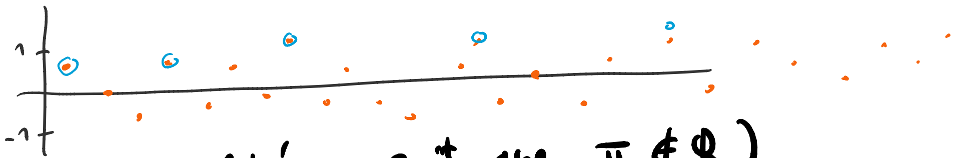
Toute suite bornée admet une sous-suite convergente

Autrement dit : si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite bornée, il existe une extraction φ telle que $(u_{\varphi(n)})_n$ converge.

Ex $u_n = (-1)^n$ (u_{2n}) et (u_{2n+1}) conviennent.

$u_n = \cos(n)$ il n'est pas facile de donner un exemple de sous-suite qui converge, mais on sait qu'il en existe par le théorème.

(**Remarque** : en fait, $\forall \ell \in [-1,1]$, il existe une sous-suite telle que $\lim_{n\to\infty} u_{\varphi(n)} = \ell$)



(lié au fait que $\pi \notin \mathbb{Q}$)

Preuve : Soit (u_n) une suite bornée.
Par le théorème de RAMSEY, il existe une extraction φ telle que $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone.
La suite $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée

donc converge.

Limites infinies

Définition : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite.
On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ si
$\forall A \in \mathbb{R}$ $\exists N \in \mathbb{N}$ $n \geq N \Rightarrow u_n \geq A$

à penser comme un réel très grand

On écrit alors $\lim_{n\to\infty} u_n = +\infty$.

Définition Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite
On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $-\infty$ si
$\forall A \in \mathbb{R}$ $\exists N \in \mathbb{N}$ $n \geq N \Rightarrow u_n \leq A$.

un réel tel que

On écrit alors $\lim_{n\to\infty} u_n = -\infty$

$\lim_{n\to\infty} u_n = +\infty$

L $\forall A \in \mathbb{R}$ …

On écrit alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$

tel que $-A$ est grand un réel