

Judi 10/09/20

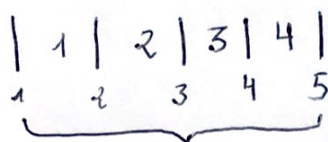
**MATHS :**

$$\sum_{k=1}^n a_k = a_1 + \dots + a_n$$

↓  
Ne pas  
le mettre  
dans la  
réponse

• Piège n°6 :

Pièges de piquets et des intervalles



n piquets délimitent  
K intervalles

⇒ On effectue un changement  
d'indice en posant  $j = k-1$   
(ou  $k = j+1$ )

↳ On écrit alors :  $\sum_{k=1}^{n+1}$

- Changer d'indice  
affecte la somme  
à 3 endroits :
  - l'indice de début
  - l'indice de fin
  - la quantité sommée

$$\left( \sum_{k=0}^n a_k = \sum_{j=0}^n a_{n-j} \right)$$

$j = n-k$   
 $k = n-j$

**Ex (rare):**

$$\sum_{k=0}^n 17 = \underbrace{17 + \dots + \dots + 17}_{n+1 \text{ termes}} = 17n$$

• Changement d'indice  
Il est souvent utile de  
décaler l'indice de  
somme

**Ex:**  $\sum_{k=1}^{n+1} \exp(k-1)$



$$\exp(k-1) = \sum_{j=0}^n \exp(j)$$

- Changements d'indice les +  
courants :
  - $j = k+1$
  - $j = k-1$
  - $j = n-k$

**Ex**  $n=3$

$$\sum_{k=1}^4 a_{k-1} = a_0 + a_1 + a_2 + a_3$$

$$\sum_{j=0}^3 a_j = a_0 + a_1 + a_2 + a_3$$

Jeudi 10/09/20

## • RÈGLES DE CALCUL POUR $\sum$

On peut rassembler les  $\sum$  qui ont les mêmes indices de début et de fin.

$$\sum_{k=m}^n a_k + \sum_{k=m}^n b_k = \sum_{k=m}^n (a_k + b_k)$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n 2k &= 2 \sum_{k=1}^n k \\ &= \frac{2n(n+1)}{2} \\ &= n(n+1) \end{aligned}$$

→ Si  $t$  est un nb réel

$$\sum_{k=m}^n (t a_k) = t \sum_{k=m}^n a_k$$

Ex on verra + tard la formule :

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$



Exemple important  
↳ sommes télescopiques.

### Proposition

Soient  $m \leq n$  deux entiers et  $a_m, a_{m+1}$  des réels

Alors

$$\sum_{k=m}^n (a_{k+1} - a_k) = a_{n+1} - a_m$$

### \*PREUVE

$$\sum_{k=m}^n (a_{k+1} - a_k) = \sum_{k=m}^n a_{k+1} - \sum_{k=m}^n a_k$$

On fait le changement d'indice

$$\begin{aligned} j = k+1 &\Leftrightarrow k = j-1 \\ &= \sum_{j=m+1}^{n+1} a_j - \sum_{j=m}^n a_j \\ &= \left( \sum_{j=m+1}^n a_j \right) + a_{n+1} - \left[ a_m + \sum_{j=m+1}^n a_j \right] \\ &= a_{n+1} - a_m \end{aligned}$$

## \* AUTRE PREUVE

10/09/20

$$\sum_{k=m}^n (a_{k+1} - a_k) = (a_{n+1} - a_n) + (a_{n+2} - a_{n+1}) + (a_{n+3} - a_{n+2}) + \dots + (a_n - a_{n-1}) + (a_{n+1} - a_n) = a_{n+1} - a_n.$$

Ex: On veut calculer :

$$\sum_{k=1}^{100} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \dots + \frac{1}{100 \times 101}$$

↳ **ASTUCE** → écrire la somme comme une somme télescopique

$$\hookrightarrow \frac{1}{k(k+1)} = \frac{k+1-k}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

$$\text{On a donc : } \sum_{k=1}^{100} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{100} \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \left( \frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right) + \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \dots + \left( \frac{1}{100} - \frac{1}{101} \right)$$

## • SOMMES DOUBLES

$\sum \rightarrow$  sommes des nombres  $(a_k)$   
soit une famille de nb réels  $(k=m, \dots, n) = \frac{1}{1} - \frac{1}{101} = \frac{100}{101}$

$$(a_{i,j}) \quad m \leq i \leq n \\ p \leq j \leq q$$

→ On peut les écrire en grille (matrice)

$$\text{Ex} \quad \begin{matrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \end{matrix}$$

La somme de tous ces nb se note :

$$\sum_{\substack{m \leq i \leq n \\ p \leq j \leq q}} a_{i,j}$$

$i =$  indice de ligne

$j =$  indice de colonne

La somme des nb d'une grille est la somme des sommes de chaque ligne, et aussi la somme des sommes de chaque colonne.

On a donc :

10/09/20

$$\sum_{\substack{m \leq i \leq n \\ p \leq j \leq q}} a_{i,j} = \sum_{i=m}^n \underbrace{\left( \sum_{j=p}^q a_{i,j} \right)}_{\text{somme de la } i^{\text{ème}} \text{ ligne}} = \sum_{j=p}^q \underbrace{\left( \sum_{i=m}^n a_{i,j} \right)}_{\text{somme de la } j^{\text{ème}} \text{ colonne}}$$

• On peut donc échanger les symboles :

$$\sum_{i=m}^n \text{ et } \sum_{j=p}^q$$



On fait plusieurs fois la somme des nb dans une partie de la grille

Ex :

$$\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} a_{ij}$$

↑  
somme des nb ( $a_{ij}$ )  
avec  $i \leq j$

$$n=3$$

$$a_{1,1} \quad a_{1,2} \quad a_{1,3}$$

$$a_{2,1} \quad a_{2,2} \quad a_{2,3}$$

$$a_{3,1} \quad a_{3,2} \quad a_{3,3}$$

On a alors :

$$\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} a_{i,j} = \sum_{i=1}^n \underbrace{\left( \sum_{j=1}^n a_{i,j} \right)}_{\text{somme de la } i^{\text{ème}} \text{ ligne}}$$

On ne peut pas échanger les deux symboles  $\sum$

La variable muette du premier  $\sum$  apparaît dans les bornes du deuxième  $\sum$

# • PRODUIT DE DEUX $\Sigma$

$$\left( \sum_{i=m}^n a_i \right) \cdot \left( \sum_{j=p}^q b_j \right) = \sum_{\substack{m \leq i \leq n \\ p \leq j \leq q}} a_i b_j$$

Ex :  $(a_1 + a_2) \cdot (b_1 + b_2 + b_3) = a_1 b_1 + a_1 b_2 + a_1 b_3 + a_2 b_1 + a_2 b_2 + a_2 b_3$ .

## \* SOMMES CLASSIQUES

### \* PROPOSITION (À CONNAÎTRE)

Pour tout entier  $n$

$$\sum_{k=1}^n k = 1 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

### \* PROPOSITION

Pour tout entier  $n$

$$\textcircled{1} \sum_{k=1}^n k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\textcircled{2} \sum_{k=1}^n k^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left[ \frac{n(n+1)}{2} \right]^2$$

grille de nb  
2 lignes  $n$   
colonnes  $n+1$

Dans chaque  $n$  colonne  
la somme vaut  $n+1$

donc  $2 \sum_{k=1}^n k = n(n+1)$

→ Preuve de  $\textcircled{1}$  ( $\textcircled{2}$  exercice) par récurrence sur  $n$   
Soit pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$   $P_n$  l'énoncé

$$\ll \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \gg$$

### • Initialisation :

$$\sum_{k=1}^1 k^2 = 1^2 = 1$$

$$\frac{1 \times (1+1) \times (2 \times 1 + 1)}{6} = \frac{1 \times 3 \times 2}{6} = 1$$

donc l'énoncé  $P_1$  est vrai.

• **Hérédité :**

10/09/20.

Supposons que  $P_n$  est vrai pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$   
et démontrons que  $P_{n+1}$  est vrai.

$$\text{On a : } \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 + (n+1)^2 = [1^2 + 2^2 + \dots + n^2] + (n+1)^2$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} k^2 &= \sum_{k=1}^n k^2 + (n+1)^2 \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \\ &= \frac{n+1}{6} [n(2n+1) + 6(n+1)] = \frac{n+1}{6} [2n^2 + 7n + 6] \\ &= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} \end{aligned}$$