

Rappel (u_n) tend vers $+\infty$ si
 $\forall A \in \mathbb{R} \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N \quad u_n \geq A$.

Théorème: Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite croissante.

Alors
 ou bien $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge
 ou bien $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.

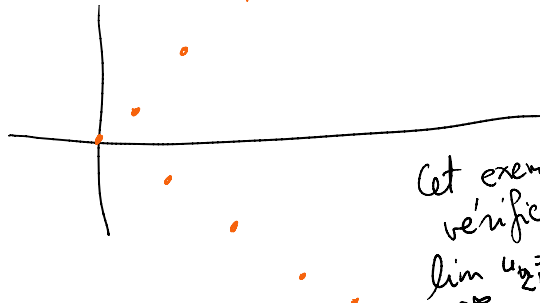
Preuve:
 • Si (u_n) est majorée, alors elle converge (car croissante majorée)
 • Si (u_n) n'est pas majorée, A n'est pas un majorant

Soit $A \in \mathbb{R}$. $\exists N \in \mathbb{N}$ tel que $u_N > A$.
 de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$:
 Comme (u_n) est croissante,

$\forall n \geq N \quad u_n \geq u_N > A$

et donc $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = +\infty$. □

Ex: de suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que (u_n) pas majorée
 (u_n) ne tend pas vers $+\infty$.
 On peut prendre $u_n = n(-1)^n$



Cet exemple vérifie
 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_{2n} = +\infty$
 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_{2n+1} = -\infty$.

Théorème de comparaison

① Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites vérifiant:

- $\forall n, u_n \leq v_n$
 - $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = +\infty$

Alors $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = +\infty$

②

- $\forall n, u_n \leq v_n$
 - $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = -\infty$
 alors $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = -\infty$

Théorème des

$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = -\infty$
 $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = -\infty$

Rq: c'est la version "limite infinie" du théorème des gendarmes.

FORMES INDÉTERMINÉES (F.I.)

Somme

$\lim u_n$
 l
 l
 $+\infty$
 $-\infty$
 $+\infty$

$\lim v_n$
 $+\infty$
 $-\infty$
 $+\infty$
 $-\infty$
 $-\infty$

$\lim(u_n + v_n)$

$+\infty$

$-\infty$

$+\infty$

$-\infty$

F.I.

$+\infty + -\infty$

De même

les formes
 $+\infty - +\infty$

et

$-\infty - -\infty$

sont indéterminées

Produit

$\lim u_n$
 $l > 0$
 $l < 0$
 0
 $l > 0$
 $l < 0$
 0

$\lim v_n$
 $+\infty$
 $+\infty$
 $+\infty$
 $-\infty$
 $-\infty$
 $-\infty$

$\lim(u_n v_n)$

$+\infty$

$-\infty$

F.I.

$0 \times +\infty$

$-\infty$

$+\infty$

F.I.

$0 \times -\infty$

$+\infty$

$-\infty$

$+\infty$

F.I.

$+\infty$

$-\infty$

$+\infty$

$-\infty$

$+\infty$

$-\infty$

$+\infty$

$-\infty$

$+\infty$

$-\infty$

$+\infty$

$-\infty$

$+\infty$

$-\infty$

$+\infty$

$-\infty$

Quotient

$\lim u_n$
 $+\infty$
 $-\infty$

$\lim v_n$
 $+\infty$
 $-\infty$

$\lim \frac{u_n}{v_n}$

F.I.

$\frac{+\infty}{+\infty}$

$\frac{+\infty}{-\infty}$

$\frac{-\infty}{+\infty}$

$\frac{-\infty}{-\infty}$

$\frac{0}{0}$

$\lim$ défini
 si $v_n \neq 0$

0

0

F.I.

0

0

F.I.

F.I.

$\frac{+\infty}{0}$

$\frac{-\infty}{0}$

peuvent être levés si on connaît le signe de v_n .

$\begin{cases} v_n > 0 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} v_n = 0 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = +\infty \end{cases} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = +\infty$

Quand on a une forme indéterminée, la suite correspondante peut

- converger vers n'importe quelle limite
- tendre vers $+\infty$ ou $-\infty$
- autre...

Ex $u_n = n+1$ $v_n = -n$ $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = +\infty$ $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = -\infty$ $u_n + v_n = (n+1) - n = 1$ $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n + v_n) = 1$

F.I. $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n + v_n) = 1$

Une autre F.I. est " $\frac{\infty}{\infty}$ " $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 1$ $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = +\infty$

$$u_n = \exp(v_n \cdot \ln(u_n))$$

$\downarrow$ $\downarrow$
 $+\infty$ 0

$a = \exp(b \ln a)$
($a > 0, b \in \mathbb{R}$)

Suites de CAUCHY

On dit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de CAUCHY si $\forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall p \geq N \forall q \geq N |u_p - u_q| \leq \epsilon$

Théorème Pour une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, on a l'équivalence

$(u_n)_{n \geq 0}$ converge $\iff (u_n)_{n \geq 0}$ est de CAUCHY. (admis)

Chapitre A4 ARITHMÉTIQUE

= étude de la division dans les entiers et des nombres premiers.

On travaille dans $\mathbb{Z}$.

On dit que $a \in \mathbb{Z}$ est multiple de $b \in \mathbb{Z}$ si $\exists k \in \mathbb{Z}$ tel que $a = b \cdot k$.

On dit aussi que b est un diviseur de a .

6 est multiple de 3, 3 est diviseur de 6.

Définition On dit que $p \geq 2$ est premier si ses seuls diviseurs sont 1 et p .

Définition On dit que $p \geq 2$ est premier
diviseur positif sont 1 et p .

Ex: 6 n'est pas premier (2 et 3 sont des
diviseurs autres que 1 et 6)
2, 3, 5, 7, 11 ... sont des nombres premiers.

1 n'est pas un nombre premier.
les nombres premiers sont positifs.

Théorème (EUCLIDE)

Il existe une infinité de nombres premiers.