

Relation de BÉZOUT $a=14$ $b=9$

$$14 = 1 \times 9 + 5$$

$$9 = 1 \times 5 + 4$$

$$5 = 1 \times 4 + 1$$

$$4 = 4 \times 1 + 0$$

PGCD = 1

$$5 = 14 - 1 \times 9$$

$$4 = 9 - 1 \times 5$$

$$1 = 5 - 1 \times 4$$

$$\begin{aligned} 1 &= 5 - 1 \times 4 = 5 - 1 \times (9 - 1 \times 5) \\ &= 2 \times 5 - 1 \times 9 \\ &= 2 \times (14 - 1 \times 9) - 1 \times 9 \\ &= 2 \times 14 - 3 \times 9 \end{aligned}$$

Deux applications des relations de BÉZOUT
1) équations diophantiennes (= dans $\mathbb{Z}$)
2) systèmes de congruences.

Une équation diophantienne est de la forme :

$a, b, c \in \mathbb{Z}$
On cherche x, y dans $\mathbb{Z}$ tels que $ax + by = c$

Théorème : cette équation admet une solution
si et seulement si $\text{PGCD}(a, b) \mid c$

Preuve $\Rightarrow$ Si x, y sont solutions

Si $\begin{cases} d \mid a \\ d \mid b \end{cases}$ alors $d \mid ax + by$ donc $d \mid c$

$\Leftarrow$ On écrit d'après la relation de BÉZOUT
 $\exists u, v \in \mathbb{Z}$ tels que $au + bv = \text{PGCD}(a, b)$
Comme $\text{PGCD}(a, b) \mid c$, $\exists k \in \mathbb{Z}$ tel que

hypothèse

$$c = k \times \text{PGCD}(a, b)$$

$$\text{donc } kau + kbv = c$$

$$a(ku) + b(kv) = c$$

$x = ku$ $y = kv$ est une solution.

On peut de plus trouver toutes les solutions
grâce au théorème de BÉZOUT.

Sur un exemple : $7x + 5y = 3$ (*)

On cherche tous les couples $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$
satisfaisant (*).

... 7 et 5.

On cherche tous les couples (x, y) vérifiant (*).

• Relation de BÉZOUT entre 7 et 5.

$$7 = 1 \times 5 + 2 \quad ; \quad 5 = 2 \times 2 + \textcircled{1} \text{ PGCD}$$

$$1 = 5 - 2 \times 2 = 5 - 2 \times (7 - 5)$$

On obtient une solution en multipliant par 3
 $3 = 9 \times 5 - 6 \times 7 = 7 \times (-6) + 5 \times 9$ (**)

Soit (x, y) solution de (*).

On soustrait : (**) - (*)

$$7(x+6) + 5(y-9) = 0$$

$$7(x+6) = -5(y-9)$$

$$7 \mid 7(x+6) \text{ donc } 7 \mid -5(y-9)$$

Comme 7 et 5 sont premiers entre eux, par le théorème de GAUSS, $7 \mid -(y-9)$

$$\text{donc } \exists k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } -(y-9) = 7k$$

$$y = 9 - 7k$$

$$\text{Enfin, } 7(x+6) = -5(-7k)$$

$$x = 5k - 6$$

Réciproquement,

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \begin{cases} x = 5k - 6 \\ y = 9 - 7k \end{cases} \text{ est solution de (*)}$$

$$\begin{aligned} 7x + 5y &= 7(5k - 6) + 5(9 - 7k) \\ &= 7 \times (-6) + 5 \times 9 = 3 \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de (*) est donc
 $\{(5k - 6, 9 - 7k); k \in \mathbb{Z}\}$.

(2) Systèmes de congruences

Théorème Soient a, b deux entiers naturels non nuls premiers entre eux.
Soient $n, z \in \mathbb{Z}$. $\dots \dots \dots x \in \mathbb{Z}$

1 ne...

premiers entre eux.

Soient $y, z \in \mathbb{Z}$.

Alors le système d'inconnue $x \in \mathbb{Z}$

$$\begin{cases} x \equiv y [a] \\ x \equiv z [b] \end{cases}$$

a une unique solution x_0 dans $\{0, \dots, ab-1\}$
et les solutions dans $\mathbb{Z}$ sont de la forme
 $x = x_0 + kab$ pour $k \in \mathbb{Z}$.

Exemple: $\begin{cases} x \equiv 3 [4] \\ x \equiv 5 [9] \end{cases}$

Ecrivons la relation de BÉZOUT entre 4 et 9

$$9 = 2 \times 4 + 1$$

EUCLIDE

$$1 = 9 - 2 \times 4$$

On raisonne modulo $36 = 4 \times 9$

$$x \equiv 3 [4] \Rightarrow \exists k_1 \in \mathbb{Z} \quad x = 4k_1 + 3$$

$$9x = 36k_1 + 27$$

$$\Rightarrow 9x \equiv 27 [36] \quad (1)$$

$$x \equiv 5 [9] \Rightarrow \exists k_2 \in \mathbb{Z} \quad x = 9k_2 + 5$$

$$4x = 36k_2 + 20$$

$$\Rightarrow 4x \equiv 20 [36] \quad (2)$$

$$\text{On a } x = 9x - 2 \times (4x)$$

$$\begin{aligned} x &\equiv 9x - 2 \times (4x) & [36] \\ &\equiv 27 - 2 \times 20 & [36] \\ &\equiv -13 & [36] \\ &\equiv 23 & [36] \end{aligned}$$

Ainsi $x = 23$ est une solution.

La forme générale d'une solution est donc
 $x = 23 + 36k$ pour $k \in \mathbb{Z}$.

Exercice trouver $x \in \mathbb{Z}$ tel que

$$\begin{cases} x \equiv 6 [13] \\ x \equiv 1 [5] \end{cases}$$

CHAPITRE B4 Fonctions continues.

$I \subset \mathbb{R}$ un intervalle.

$$f: I \longrightarrow \mathbb{R}$$

Définition On dit que f est continue en x
 $\forall \epsilon > 0 \exists \alpha > 0 \quad |x - y| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon$

Intuition: si y est assez proche de x ,
alors $f(y)$ est assez proche de $f(x)$.

Définition On dit que f est continue sur I
si $\forall x \in I$, f est continue en x .

Toutes les fonctions usuelles (sauf la fonction partie entière E) sont continues sur leur domaine de définition.

Théorème: la somme, le produit, la composition, le quotient* de fonctions continues est une fonction continue.
(* si la fonction au dénominateur ne s'annule pas).

Exemple $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
 $x \longmapsto \sqrt{|\cos(x^2 - 2)|} \exp(-\sin(3x))$
est continue comme produit et composition de fonctions usuelles.