

On cherche $x \in \mathbb{Z}$ tel que

$$\begin{cases} x \equiv 6 & [13] \\ x \equiv 1 & [5] \end{cases} (*)$$

On raisonne modulo $13 \times 5 = 65$.

Soit x solution de (*).

Alors
$$\begin{cases} 5x \equiv 5 \times 6 \equiv 30 & [65] \\ 13x \equiv 13 \times 1 \equiv 13 & [65] \end{cases}$$

On écrit la relation de BÉZOUT entre 13 et 5.

Algo. d'EUCLIDE $13 = 2 \times 5 + 3$ $5 = 3 + 2$ $3 = 2 + 1$

on le remonte $1 = 3 - 2$ $2 = 5 - 3$ $3 = 13 - 2 \times 5$
 $1 = 3 - (5 - 3) = 2 \times 3 - 5 = 2 \times (13 - 2 \times 5) - 5$
 $= 2 \times 13 - 5 \times 5$

On a donc $x = 2 \cdot 13x - 5 \cdot 5x \equiv 2 \times 13 - 5 \times 30 \pmod{65}$
 $\equiv -124 \pmod{65}$

Une solution est donc $x = -124$.

Comme $-124 \equiv 6 \pmod{65}$ ($-124 + 2 \times 65 = 6$), une autre solution est $x = 6$ (facile à voir a posteriori....)

L'ensemble des solutions est $\{6 + 65k, k \in \mathbb{Z}\}$