

Rappel On appelle segment de $\mathbb{R}$
un intervalle fermé borné, c'est-à-dire
de la forme $[a, b]$ avec $a < b$ réels

Théorème Une fonction continue sur un
segment I est bornée et atteint ses bornes

$$\exists x_0 \in I, \exists x_1 \in I \\ \forall x \in I \quad f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1)$$

Rg Le théorème devient faux pour un intervalle
qui n'est pas un segment : sur $[1, +\infty[$
on peut avoir une fonction non bornée ($x \mapsto \ln(x)$)
ou bien une fonction bornée qui n'atteint pas ses
bornes ($f: x \mapsto \frac{1}{x}$)

bornée (majorée par 1
minorée par 0)

$$\sup_{x \in [1, +\infty[} f(x) = 1 \leftarrow \text{atteinte en } x=1.$$

$$\inf_{x \in [1, +\infty[} f(x) = 0 \leftarrow \text{non atteinte}$$

Preuve

$$I = [a, b] \quad f: I \rightarrow \mathbb{R}$$

Posons $M = \sup_{x \in [a, b]} f(x) \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$

On peut trouver une suite (x_n) dans $[a, b]$ $\rightarrow$ donc (x_n) bornée
telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = M$.

Par le théorème de BOLZANO-WEIERSTRASS,
il existe une sous-suite $(x_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$
qui converge vers $x \in [a, b]$.

Comme f est continue, on a donc
 $(f(x_{\varphi(n)}))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $f(x)$.

C'est une sous-suite de $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$,
elle converge donc aussi vers M .

Par unicité de la limite d'une suite, on a
 $f(x) = M \in \mathbb{R}$
et M est atteint

Par unicité de la limite d'une fonction, $f(x) = M \in \mathbb{R}$
 Ce qui montre que f est majorée et atteint
 sa borne supérieure.
 On procède de même pour montrer que f est
 minorée et atteint sa borne inférieure.

Prolongement par continuité

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $a \in I$.

Soit $f: I \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue

telle que $l = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existe. ($l \in \mathbb{R}$)

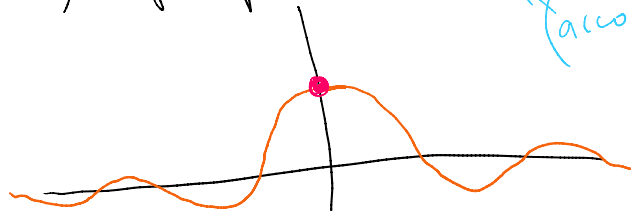
Alors la fonction $g: I \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq a \\ l & \text{si } x = a \end{cases}$$

est continue sur I .

On dit que g est le prolongement
par continuité de f .

Ex $f(x) = \frac{\sin x}{x}$, définie pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ (accolade)



Où $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

on prolonge par continuité, donc f peut
 $g(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

* forme indéterminée

$\left(\frac{0}{0}\right)$ mais on peut montrer que
 la limite de $\frac{\sin x}{x}$ est 1
 $\frac{\sin'(0)}{\cos'(0)}$

On peut aussi montrer que

$$\forall x > 0 \quad x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x$$

$$\forall x > 0 \quad 1 - \frac{x^2}{6} \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1$$

et utiliser le
th. des gendarmes.

On peut aussi montrer
 $\forall x \geq 0 \quad x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x$ et utiliser le
 $\forall x > 0 \quad 1 - \frac{x^2}{6} \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1$ th. des gendarmes

Chapitre A5 POLYNÔMES

Définition

Si $a_0, a_1, \dots, a_n$ est une famille finie de nombres réels ou complexes,

$P(X) = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \dots + a_n X^n$ est un polynôme d'indéterminée X .

On note $\begin{cases} \mathbb{R}[X] \\ \mathbb{C}[X] \end{cases}$ l'ensemble des polynômes à coefficients $\begin{cases} \text{réels} \\ \text{complexes.} \end{cases}$

Si on remplace X par x , on obtient une fonction $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$
 $x \mapsto P(x)$ ou $x \mapsto P(x)$.

Soit $P(X) = a_0 + a_1 X + \dots + a_n X^n$.

le degré de P est le plus grand entier d tel que $a_d \neq 0$. On le note $d^0 P$ ou $\deg(P)$.

$$\begin{aligned} P(X) &= X^3 + 1 & d^0(P) &= 3 \\ Q(X) &= X - 2 & d^0(Q) &= 1 \\ R(X) &= 3 & d^0(R) &= 0 \end{aligned}$$

$$R = \underbrace{3}_{a_0} X^0$$

$$P(X) = 0$$

(aucun terme dans la somme)

Par convention, le degré du polynôme nul est $-\infty$.

Le coefficient dominant d'un polynôme $P(X) = a_0 + \dots + a_d X^d$ de degré d est a_d .

Opération sur les polynômes.

- On peut :
- les ajouter ($P+Q$)
 - les multiplier (PQ)
 - les dériver (P')

$$\text{Si } P(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_dx^d \\ = \sum_{i=0}^d a_i x^i$$

$$\text{alors } P'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \dots + da_dx^{d-1} \\ = \sum_{i=1}^d i a_i x^{i-1} \\ = \sum_{j=0}^{d-1} (j+1) a_{j+1} x^j \quad \begin{matrix} j=i-1 \\ i=j+1 \end{matrix}$$

- les composer ($P \circ Q$)

$$P(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_dx^d$$

$$(P \circ Q)(x) = a_0 + a_1Q(x) + \dots + a_dQ(x)^d$$

Propriétés du degré

Soient P, Q deux polynômes non constants

$$d^0(PQ) = d^0(P) + d^0(Q)$$

$$d^0(P+Q) \leq \max(d^0(P), d^0(Q))$$

$$d^0(P') = d^0(P) - 1$$

$$d^0(P \circ Q) = d^0(P) \cdot d^0(Q)$$



$$\begin{aligned} P(x) &= x^2 + x \\ Q(x) &= -x^2 \\ d^0P &= 2 \quad d^0Q = 2 \\ d^0(P+Q) &= 1 \end{aligned}$$

Ex : $P(x) = x+1 \quad Q(x) = x^2-2$

$$(PQ)(x) = (x+1)(x^2-2) \\ = x^3 + x^2 - 2x - 2$$

$$(P+Q)(x) = x^2 + x - 1$$

$$(P')(x) = 1$$

$$(P \circ Q)(x) = (x^2-2)+1 = x^2-1$$

$$(Q \circ P)(x) = (x+1)^2 - 2 = x^2 + 2x - 1$$