Cours du 27 novembre

vendredi 27 novembre 2020 08:21

Rappel : on a défini
polynôme irréductible (≃ nombre premier)

PGCD
Th. de BEZOUT
polynômes premiers entre eux.

PPCM Soient A, B deux polynômes.
L'ensemble des polynômes unitaires multiples de A et de B admet un unique élément de plus petit degré, qu'on appelle $PPCM(A,B)$.

Ex : $A(X) = 2X(X+1)$
$B(X) = \frac{1}{3}(X+1)^2(X-2)$ ⟸ factorisés en produit d'irréductibles

$PGCD(A,B) = X+1$
$PPCM(A,B) = X(X+1)^2(X-2)$

on ignore les facteurs 2 et $\frac{1}{3}$ car le PGCD et le PPCM sont unitaires par définition.

Proposition Soient $A, B \in \mathbb{K}[X]$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), $A \neq 0$ $B \neq 0$.
Alors $\exists \lambda \in \mathbb{K}$ tq $PGCD(A,B)\,PPCM(A,B) = \lambda AB$

(permet le PPCM sans factoriser A et B ; on calcule le PGCD par l'algorithme d'Euclide, puis $PPCM = \dfrac{\lambda AB}{PGCD(A,B)}$ ⟸ division euclidienne.

Racines multiples d'un polynôme

Rappel $P \in \mathbb{K}[X]$
$\alpha \in \mathbb{K}$
α est racine de $P \iff P(\alpha) = 0 \iff (X-\alpha)$ divise P.

Définition Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, α une racine de P et $n \in \mathbb{N}^*$.
On dit que α est une racine d'ordre n (de multiplicité n)
si $(X-\alpha)^n$ divise P et $(X-\alpha)^{n+1}$ ne divise pas P.

ordre de α = $\max\{n$ tq $(X-\alpha)^n$ divise $P\}$.

Ordre de $\alpha = \max\{n$ tq $(X-\alpha)^n$ divise $P\}$.

Racine d'ordre 2 = Racine double

≥ 2 = Racine multiple

Racine d'ordre 1 = Racine simple.

Théorème Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{K}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Alors $(X-\alpha)^n$ divise $P \iff P(\alpha) = P'(\alpha) = \dots = P^{(n-1)}(\alpha) = 0$

dérivée $(n-1)$ ème

C'est équivalent à dire que α est racine d'ordre au moins n de P.

Il y a n conditions à vérifier.

Exemple α racine double de P

$\Updownarrow$

$P(\alpha) = P'(\alpha) = 0$ et $P''(\alpha) \neq 0$

α racine simple de P

$\Updownarrow$

$P(\alpha) = 0$ et $P'(\alpha) \neq 0$.

Exemple

$P(X) = X^3 - 2X^2 + X \qquad P(1) = 0$

$P'(X) = 3X^2 - 4X + 1 \qquad P'(1) = 0$

$P''(X) = 6X - 4 \qquad P''(1) = 2 \neq 0$

1 est racine double

Remarque Si α est racine d'ordre n de P $(P \neq 0)$ alors $n \leq d°P$.

Preuve

$(X-\alpha)^n \mid P \iff P(\alpha) = P'(\alpha) = \dots P^{(n-1)}(\alpha) = 0$

$\Rightarrow$ Si $(X-\alpha)^n \mid P$, $\exists Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que

$P(X) = Q(X)(X-\alpha)^n$

Formule de LEIBNIZ pour les dérivées d'un produit

$(fg)' = f'g + fg'$

$(fg)'' = (f'g)' + (fg')' = f''g + f'g' + f'g' + fg''$

$= f''g + 2f'g' + fg''$

$(fg)''' = (f''g)' + 2(f'g')' + (fg'')'$

$= f'''g + f''g' + 2f''g' + 2f'g'' + f'g'' + fg'''$

$= f'''g + 3f''g' + 3f'g'' + fg'''$

Plus généralement ... Formule

$= f'''g + 3f''g' + 3f'g'' + fg'''$

Plus généralement

$\forall k \in \mathbb{N}$ $\boxed{(fg)^{(k)} = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} f^{(i)} g^{(k-i)}}$ Formule de LEIBNIZ

(preuve par récurrence)

(Noter la similarité avec la formule du binôme de NEWTON).

Pour nous $P(X) = \varphi(X) R(X)$ où $R(X) = (X-\alpha)^n$

$$p^{(k)}(X) = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \underbrace{\varphi^{(i)}(X) R^{(k-i)}(X)}$$

Si $k \leq n-1$ tous ces termes s'annulent en α

car $R'(X) = n(X-\alpha)^{n-1}$ | $R'(\alpha) = 0$

$R''(X) = n(n-1)(X-\alpha)^{n-2}$ | $R''(\alpha) = 0$

$\vdots$

$R^{(n-1)}(X) = n!\,(X-\alpha)$ | $R^{(n-1)}(\alpha) = 0$

On a donc $p^{(k)}(\alpha) = 0$ pour $0 \leq k \leq n-1$.

$\Leftarrow$ On suppose $P(\alpha) = P'(\alpha) = \cdots = P^{(n-1)}(\alpha) = 0$

Ecrivons la division euclidienne de P par $(X-\alpha)^n$

$$P(X) = \underbrace{\varphi(X)\,(X-\alpha)^n}_{} + R(X) \quad \text{avec } d^\circ R < n$$

par hypothèse

les dérivées en α d'ordre $\leq n-1$ sont nulles

par la première implication

donc R vérifie aussi $R(\alpha) = R'(\alpha) = R''(\alpha) = \cdots = R^{(n-1)}(\alpha) = 0$.

Posons $S(X) = R(X+\alpha)$

$\Updownarrow$

$R(X) = S(X-\alpha)$

On a en dérivant $S'(X) = R'(X+\alpha)$ (dérivation d'un produit)

$S''(X) = R''(X+\alpha)$

$\vdots$

$S^{(n-1)}(X) = R^{(n-1)}(X+\alpha)$

On a donc $S(0) = S'(0) = \cdots = S^{(n-1)}(0) = 0$

$d^\circ S = d^\circ R < n$

Ecrivons $S(X) = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \cdots + a_{n-1} X^{n-1}$

$d°S = d°R < n$

Ecrivons $S(X) = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \dots + a_{n-1} X^{n-1}$

$0 = S(0) = a_0$

$0 = S'(0) = a_1$

$0 = S''(0) = 2a_2$

La dérivée $k^{ème}$ de X^k est $k!$

$\vdots$

$0 = S^{(k)}(0) = k!\, a_k$

Ainsi tous les coefficients de S sont nuls, donc $S = 0$ et $R = 0$

donc $(X-\alpha)^n \mid P$.

Relations coefficients racines

Un trinôme unitaire est de la forme $\overset{A(X)}{\overset{\parallel}{X^2 - sX + p}}$ (1)

avec $s, p \in \mathbb{C}$

Dans $\mathbb{C}$ le polynôme A admet 2 racines (ou 1 racine double)

z_1 et z_2. On a $\begin{cases} z_1 + z_2 = s \\ z_1 \cdot z_2 = p \end{cases}$

Preuve $\quad X - z_1 \mid A$, $X - z_2 \mid A$ donc $A = (X - z_1)(X - z_2)$
$= X^2 - (z_1 + z_2)X + z_1 z_2$ (2)

et on identifie les coefficients dans les écritures (1) et (2).

Quel est l'équivalent pour les polynômes de plus grand degré

$$(X - z_1)(X - z_2)(X - z_3) = X^3 - (z_1 + z_2 + z_3)X^2 + (z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3)X - z_1 z_2 z_3$$

somme

produit

Plus généralement

Si P est un polynôme unitaire de degré n dans $\mathbb{C}[X]$ de la forme $P(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_1 X + a_0$

et si $z_1 \dots z_n$ sont les racines de P, alors (comptés avec multiplicité)

$$a_{n-k} = (-1)^k \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \dots < i_k \le n} z_{i_1} z_{i_2} \cdots z_{i_k}$$

$(k=1)$

$n-k$ $\quad 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k$

En particulier

$$a_{n-1} = -(z_1 + \dots + z_n) \qquad (k=1)$$

$$a_0 = (-1)^n z_1 z_2 \cdots z_n \qquad (k=n)$$