

Chapitre B5 Dérivabilité

① Définition

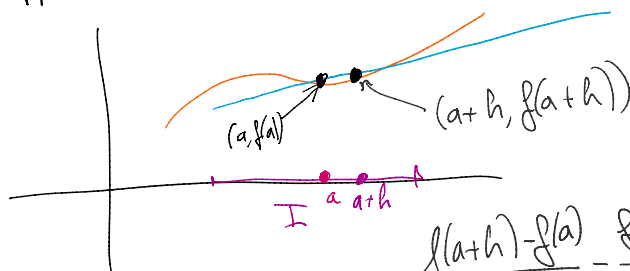
$I \subset \mathbb{R}$ intervalle

$f: I \rightarrow \mathbb{R}$

$a \in I$ (pas une borne)

On dit que f est dérivable en a si la limite suivante existe

On note $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ cette limite et on l'appelle dérivée de f en a .



$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{f(a+h) - f(a)}{(a+h) - a}$$

c'est la pente de la droite qui passe par $(a, f(a))$ et $(a+h, f(a+h))$

le nombre $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ s'appelle taux d'accroissement de f .

Graphiquement, f est dérivable en a si le graphe de f admet une tangente de pente $f'(a)$ au point $(a, f(a))$.

On dit que f est dérivable sur I si elle est dérivable en tout point de I .

Théorème Toute fonction dérivable est continue.
(si f est dérivable en a , elle est continue en a)

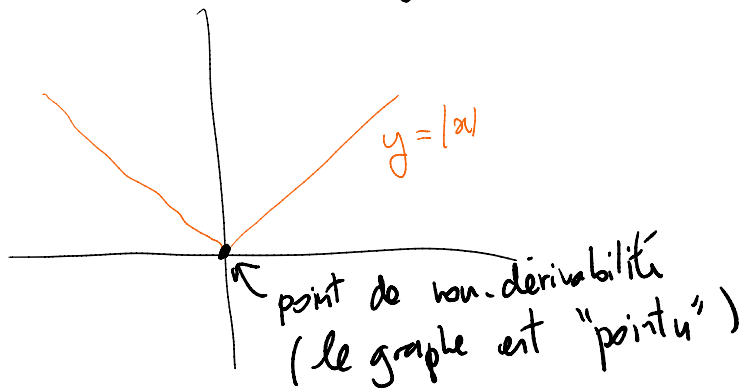
Remarque: la réciproque est fautive: par $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mais pas

Remarque : la réciproque est fautive. par la fonction $x \mapsto |x|$ est continue mais pas dérivable. Montrons qu'elle n'est pas dérivable en 0.

$$a=0 \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|0+h| - |0|}{h} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad \text{pour } a=0, f=|\cdot|$$

$$= \frac{|h|}{h} = \begin{cases} 1 & \text{si } h > 0 \\ -1 & \text{si } h < 0 \end{cases}$$

et donc la limite n'existe pas (la limite à droite vaut 1, la limite à gauche vaut -1, elles sont différentes).



Preuve du théorème

Soit f dérivable en a . Montrons qu'elle est continue en a , autrement dit que $\lim_{b \rightarrow a} f(b) = f(a)$ ou encore $\lim_{h \rightarrow 0} f(a+h) = f(a)$

$$f(a+h) = f(a) + h \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

quand $h \rightarrow 0$
 $(0 \times \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \rightarrow 0)$

$$\text{et donc } \lim_{h \rightarrow 0} f(a+h) = f(a).$$

Les fonctions usuelles (à part $E(\cdot)$, $|\cdot|$, $\sqrt{\cdot}$) sont dérivables sur leur domaine de définition.

$\longrightarrow$ 1 dérivable en 0

sont dérivables sur leur domaine.

- la fonction $\sqrt{\cdot}$ n'est pas dérivable en 0

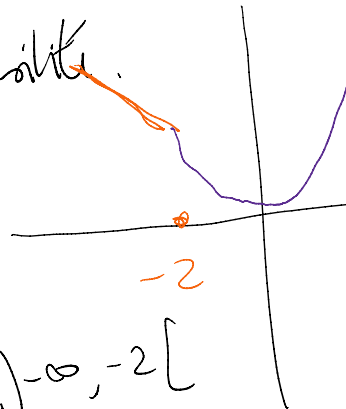
taux d'accroissement $(h > 0)$:
$$\frac{\sqrt{0+h} - \sqrt{0}}{h} = \frac{\sqrt{h}}{h} = \frac{1}{\sqrt{h}} \xrightarrow{h \rightarrow 0} +\infty$$
 pas de limite finie

- la fonction $E(\cdot)$ est dérivable et de dérivée nulle sur chaque intervalle $]n, n+1[$, $n \in \mathbb{Z}$.

Si on a une fonction définie par morceaux, il faut vérifier que les morceaux se "rejoignent" bien pour avoir la continuité / dérivabilité.

EX
$$f(x) = \begin{cases} -x &]-\infty, -2] \\ \frac{x^2}{2} &]-2, +\infty[\end{cases}$$

la fonction f est dérivable sur $]-\infty, -2[$ et sur $]2, +\infty[$ (fonction usuelle, polynôme)



$$\lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x < -2}} f(x) = -(-2) = 2$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x > -2}} f(x) = \frac{(-2)^2}{2} = 2$$
 donc f est continue en -2 , donc continue sur $\mathbb{R}$.

Pour voir si f est dérivable en -2 , calculons

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-2+h) - f(-2)}{h} = 2$$
 Si $h > 0$:
$$\frac{f(-2+h) - f(-2)}{h} = \frac{\frac{(-2+h)^2}{2} - 2}{h} = \frac{\frac{4 - 4h + h^2}{2} - 2}{h} = \frac{4 - 4h + h^2 - 4}{2h} = \frac{-4h + h^2}{2h} = \frac{-4 + h}{2} \xrightarrow{h \rightarrow 0} -2$$
 Si $h < 0$:
$$\frac{f(-2+h) - f(-2)}{h} = \frac{-(-2+h) - 2}{h} = \frac{-(-2+h) - 2}{h} = \frac{2 - h - 2}{h} = \frac{-h}{h} = -1 \xrightarrow{h \rightarrow 0} -1$$

1

2

$$\cdot \text{ Si } h < 0 \quad \frac{f(-2+h) - f(-2)}{h} = \frac{-(-2+h) - 2}{h} = \frac{-2+h-2}{h} = \frac{-4+h}{h} = -\frac{4}{h} + 1$$

$\xrightarrow{h \rightarrow 0} -\infty$

Conclusion: pas de limite au taux d'accroissement donc f n'est pas dérivable en -2 .

Comment calculer les dérivées?

Théorème (rappel)

Si $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$ sont dérivables en $a \in I$.

Alors (1) $f+g$ est dérivable en a , et
 $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$

(2) fg est dérivable en a , et
 $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$

(3) (si $g \neq 0$)
 $\frac{f}{g}$ est dérivable en a , et
 $\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}$

$$\frac{fg - fg'}{g^2}$$

Preuve

$$(1) \quad \frac{(f+g)(a+h) - (f+g)(a)}{h} = \underbrace{\frac{f(a+h) - f(a)}{h}}_{\downarrow f'(a)} + \underbrace{\frac{g(a+h) - g(a)}{h}}_{\downarrow g'(a)}$$

$$(2) \quad \frac{(fg)(a+h) - (fg)(a)}{h} = \frac{f(a+h)g(a+h) - f(a)g(a+h) + f(a)g(a+h) - f(a)g(a)}{h}$$

$\xrightarrow{\text{car } g \text{ est continue puisque dérivable.}}$

$$= g(a+h) \underbrace{\frac{f(a+h) - f(a)}{h}}_{\downarrow f'(a)} + f(a) \underbrace{\frac{g(a+h) - g(a)}{h}}_{\downarrow g'(a)}$$

$$\downarrow$$

$$g(a)f'(a) + f(a)g'(a)$$

$$(3) \quad \text{Montrons d'abord } \left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2}$$

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(a) = \frac{1 \cdot g'(a) - g(a) \cdot g'(a)}{g(a)^2} = -\frac{g'(a)}{g(a)^2}$$

$$\begin{aligned} \frac{\left(\frac{1}{g}\right)(a+h) - \left(\frac{1}{g}\right)(a)}{h} &= \frac{g(a) - g(a+h)}{h g(a) g(a+h)} \\ &= \underbrace{\left[\frac{g(a+h) - g(a)}{h} \right]}_{g'(a)} \cdot \underbrace{\frac{1}{g(a) g(a+h)}}_{\substack{\downarrow g(a) \quad \downarrow g(a) \\ \text{car } g \text{ continue}}} \\ &\rightarrow -\frac{g'(a)}{g(a)^2} \end{aligned}$$

Enfin $\frac{f}{g} = f \cdot \frac{1}{g}$ donc d'après (2)

$$\begin{aligned} \left(\frac{f}{g}\right)' &= f' \cdot \frac{1}{g} + f \cdot \left(\frac{1}{g}\right)' = f' \cdot \frac{1}{g} - \frac{f g'}{g^2} \\ &= \frac{f'g - fg'}{g^2} \end{aligned}$$

Dérivation d'une fonction composée

Rappel $(f \circ g)' = g' \cdot f' \circ g$

Preuve
$$\frac{(f \circ g)(a+h) - (f \circ g)(a)}{h} = \frac{f(g(a+h)) - f(g(a))}{g(a+h) - g(a)} \cdot \underbrace{\frac{g(a+h) - g(a)}{h}}_{g'(a)}$$

quand $h \rightarrow 0$
 $g(a+h) \rightarrow g(a)$
 (g continue)

tanx d'accroissement
 def entre $g(a)$ et $g(a+h)$
 qui tend vers $f'(g(a))$
 car f continue en $g(a)$.

$$\rightarrow f'(g(a)) \cdot g'(a)$$

Ex dériver $a \mapsto \sin(3a^2 + 2)$ (réponse dans)

Ex dériver

$$a \mapsto \sin(3a^4 + 2)$$

$$x \mapsto \sqrt{x^2 + x + 1}$$

(réponses dans
le poly).

