

Somme à connaître (suite)

Somme d'une suite géométrique

Proposition : soit a un réel différent de 1 . Alors pour tout entier n ,

$$\sum_{k=0}^n a^k = 1 + a + \dots + a^n = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1}$$

(ne pas oublier d'invoquer $a \neq 1$ sinon on tombe dans le piège de la division par 0.

Si $a = 1$ on a simplement $\sum_{k=0}^n a^k = \sum_{k=0}^n 1 = n+1$.

Preuve

$$\begin{aligned} (a-1) \sum_{k=0}^n a^k &= \sum_{k=0}^n (a^{k+1} - a^k) \\ &= \sum_{k=0}^n a^{k+1} - \sum_{k=0}^n a^k \\ &= a^{n+1} - a^0 \\ &= a^{n+1} - 1 \end{aligned}$$

Somme télescopique !

d'où le résultat en divisant par $a-1$, qui est non nul

Une autre formule à connaître est la formule de factorisation suivante :

Proposition : soient a, b des réels et $n \in \mathbb{N}$. Alors

$$a^n - b^n = (a-b) \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} b^k = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + b^{n-1})$$

Exemples

$n=2$

$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

$n=3$

$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

$n=4$

$a^4 - b^4 = (a-b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)$

etc

:

Remarque : si on fait $b=1$, on retrouve la proposition précédente.Preuve

$$(a-b) \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} b^k$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} (a^{n-k} b^k - a^{n-1-k} b^{k+1})$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-k} b^k - \sum_{l=1}^n a^{n-l} b^l$$

$$= a^n - b^n$$

Changement d'indice

$l = k+1$

dans la 2^{ème} sommeProduits On utilise le symbole $\prod$ pour noter les produits de la même façon qu'on utilise le symbole $\sum$ pour noter les sommes.

On a donc

NotationSoient $m \leq n$ des entierset $a_m, a_{m+1}, \dots, a_n$ des réels.

On pose

$$\prod_{k=m}^n a_k = a_m \times a_{m+1} \times \dots \times a_n$$

Lorsque $m > n$, on pose $\prod_{k=m}^n a_k = 1$

(convention naturelle : si on multiplie des nombres dans une boucle FOR, il faut initialiser à 1)

Un cas ~~très~~ particulier et important de produit est la factorielle

Définition

Soit n un entier naturel.

On appelle "factorielle n " et on note " $n!$ " le nombre

$$n! = \prod_{k=1}^n k = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n.$$

On a donc

$$0! = 1$$

$$1! = 1$$

$$2! = 2$$

$$3! = 6$$

$$4! = 24$$

$$5! = 120$$

⋮

(ça augmente très vite)

Soit L une liste de n éléments distincts.

Alors $n!$ est le nombre de façons d'ordonner la liste.

A1.5 Coefficients binomiaux

Les factorielles apparaissent notamment dans les coefficients binomiaux.

Définition

Soient k, n des entiers naturels vérifiant $k \leq n$.

On pose

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)(n-2) \dots (n-k+1)}{k(k-1) \dots 1}$$

Les nombres $\binom{n}{k}$ s'appellent "coefficients binomiaux".

$\binom{n}{k}$ se lit "k parmi n".

Proposition Soit $0 \leq k \leq n$ des entiers
et E un ensemble à n éléments.

Alors $\binom{n}{k}$ est le nombre de sous-ensembles de E
à k éléments

En particulier, $\binom{n}{k}$ est un nombre entier, ce qui n'est pas évident puisqu'il est défini comme une fraction.

Preuve : pour déterminer une partie à k éléments de E

— on choisit un 1^{er} élément $\rightarrow n$ choix

— ————— 2^{ème} ————— $\rightarrow (n-1)$ choix

$\vdots$

— ————— $k^{\text{ème}}$ ————— $\rightarrow (n-k+1)$ choix

Mais cette procédure compte plusieurs fois chaque sous-ensemble FCE à k éléments. Plus exactement, chaque F est compté $k!$ fois, autant que le nombre de façons d'ordonner F .

~~le nombre~~

Le nombre de sous-ensembles est donc

$$\frac{n(n-1) \dots (n-k+1)}{k!} = \binom{n}{k}$$

Propriétés des coefficients binomiaux

$$\left[\begin{array}{l} (1) \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \\ (2) \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \\ (3) \binom{n}{k} = \frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1} \\ (4) \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k} \end{array} \right.$$

Preuve ① $\binom{n}{0} = \frac{n!}{0! n!} = 1 \quad \binom{n}{n} = \frac{n!}{n! 0!} = 1$

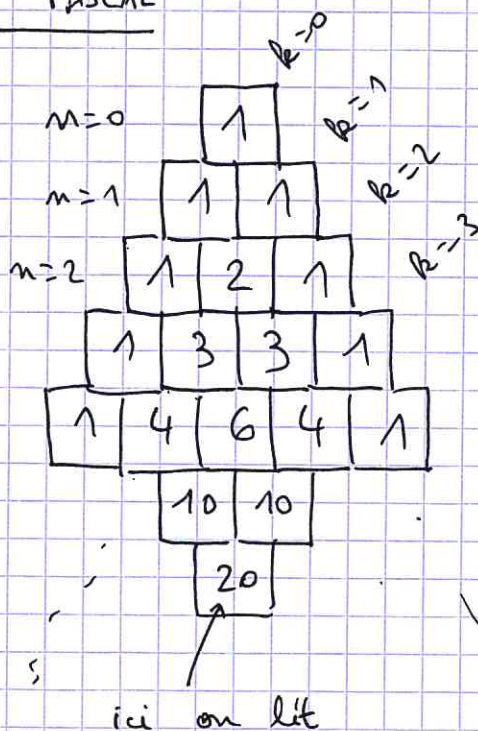
② $\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)! (n-(n-k))!} = \frac{n!}{k! (n-k)!} = \binom{n}{k}$

③ $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! k!} = \frac{n \times (n-1)!}{(n-k) \times (n-1-k)! k!}$
 $= \frac{n}{n-k} \times \binom{n-1}{k-1}$

④ $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \frac{n!}{(k-1)! (n-k+1)!} + \frac{n!}{k! (n-k)!}$
 $= \frac{k n! + ((n-k+1) n!)}{k! (n-k+1)!}$
 $= \frac{(n+1) n!}{k! (n+1-k)!}$
 $= \frac{(n+1)!}{k! (n+1-k)!}$

Defi: démontrer ①②③④ sans calcul mais en utilisant la proposition précédente.

La relation (4) permet de construire le Triangle de PASCAL



$$\binom{6}{3}$$

dans chaque case on inscrit la somme des deux cases juste au-dessus : c'est la relation (4)

Formule très importante

Formule du binôme de NEWTON

Pour a, b dans $\mathbb{R}$ et pour n dans $\mathbb{N}^*$, on a

~~$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$~~

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Preuve On écrit $(a+b)^n = (a+b) \times \dots \times (a+b)$ et on développe. Il apparaît des termes $a^k b^{n-k}$ - autant de fois que le nombre de sous-ensembles à k éléments de $\{1, \dots, n\}$.