

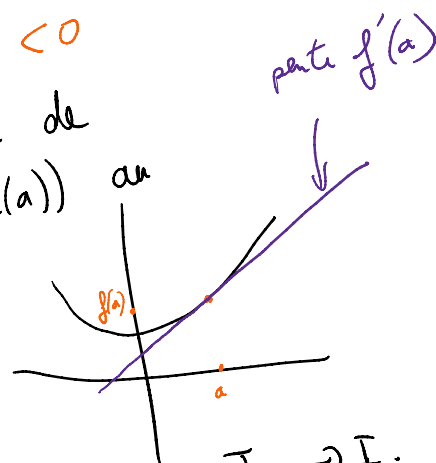
Rappel

$f: I \rightarrow \mathbb{R}$ est dérivable en a (point intérieur de I) si

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \text{ existe dans } \mathbb{R}$$

$h \rightarrow 0$ par valeurs > 0 ou < 0

Graphiquement, $f'(a)$ est la pente de la tangente en $(a, f(a))$ au graphe de f .



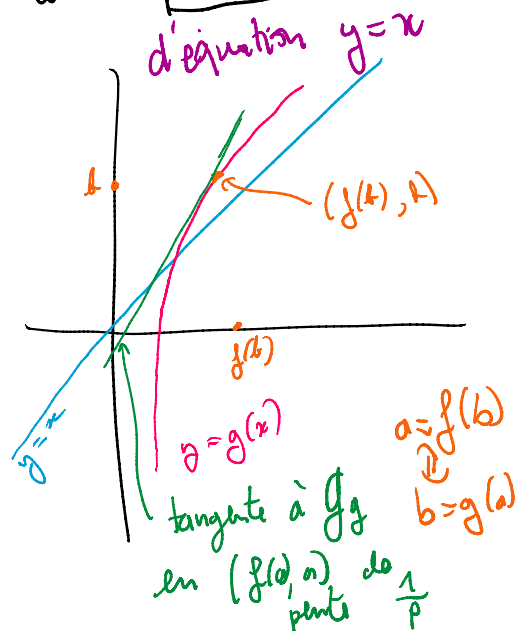
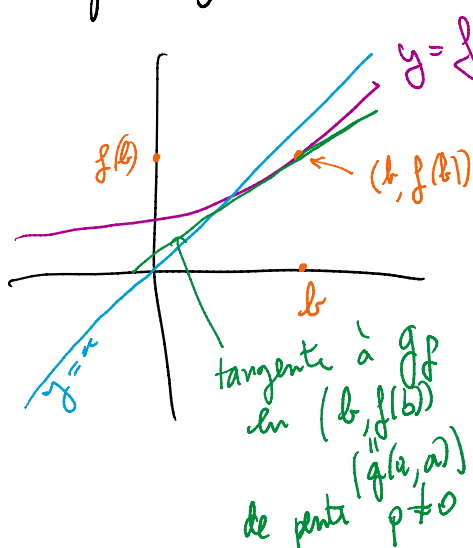
Rappel

Si $f: I \rightarrow J$ est bijective et de bijection réciproque $g: J \rightarrow I$.
Soit $a \in J$ tel que f est dérivable en $g(a) \in I$
avec $f'(g(a)) \neq 0$. Alors g est dérivable en a
et $g'(a) = \frac{1}{f'(g(a))}$

Applications : dérivée de $\ln$ (réciproque de $\exp$)
dérivée de $\sqrt{\cdot}$ (réciproque de $x \mapsto x^2$)

Graphiquement

$y = f(x) \Leftrightarrow x = g(y)$
Donc on passe du graphe de f au graphe de g
en échangeant le rôle de x et y , donc
par symétrie par rapport à la première bissectrice



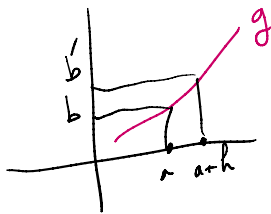
de pente $p \neq 0$

en $(f(a), a)$ de pente $\frac{1}{p}$

(La symétrie par rapport à la première bissectrice envoie une droite de pente p sur une droite de pente $\frac{1}{p}$)

Preuve

On pose $b = g(a) \Leftrightarrow f(b) = a$
Soit $h \neq 0$ tel que $a+h \in J$



$$\frac{g(a+h) - g(a)}{h}$$

$$= \frac{b' - b}{f(b') - f(b)}$$

$$= \left(\frac{f(b') - f(b)}{b' - b} \right)^{-1}$$

soit $b' = g(a+h)$
 $\uparrow$
 $f(b') = a+h$

Quand $h \rightarrow 0$, b' tend vers b (car g est continue en a)

et $\lim_{b' \rightarrow b} \frac{f(b') - f(b)}{b' - b} = f'(b)$ par définition de la dérivée.

Ponc $g'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(a+h) - g(a)}{h} = \frac{1}{f'(b)} = \frac{1}{f'(g(a))}$

Extrema (extremum = maximum ou minimum).

Définition

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in I$.

(1) On dit que a est un maximum de f si $\forall x \in I, f(x) \leq f(a)$.

(2) On dit que a est un minimum de f si $\forall x \in I, f(x) \geq f(a)$.

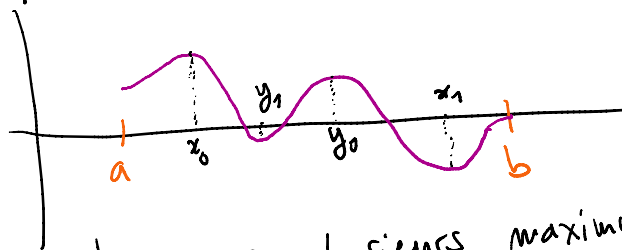
(3) On dit que a est un maximum local de f si $\exists \varepsilon > 0, \forall x \in I \cap]a-\varepsilon, a+\varepsilon[, f(x) \leq f(a)$.

(4) On dit que a est un minimum local de f si $\exists \varepsilon > 0, \forall x \in I \cap]a-\varepsilon, a+\varepsilon[, f(x) \geq f(a)$.

$\tau + f(\text{maximum})$ est un maximum local

Tout $\begin{cases} \text{maximum} \\ \text{minimum} \end{cases}$ est un $\begin{cases} \text{maximum local} \\ \text{minimum local} \end{cases}$
 mais la réciproque est fautive.

x_0 est un maximum
 x_1 est un minimum
 y_0 est un maximum local
 y_1 est un minimum local



$I =]a, b[$

⚠ Une fonction peut avoir plusieurs maximums (ou maxima)
 exemple : $x \mapsto \cos x$ a un maximum en $2k\pi \forall k \in \mathbb{Z}$.

Théorème

Soit I un intervalle
 a un point dans l'intérieur de I
 $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable en a.

Si a est un maximum local ou un minimum local
 de f , alors $f'(a) = 0$



C'est important que a soit dans l'intérieur de I ,
 sinon c'est faux. Exemple $f: [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \sin x$

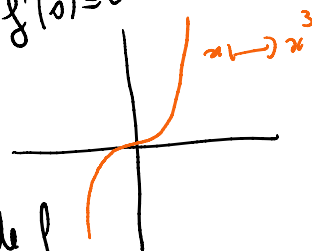
a un minimum en 0 mais $f'(0) = \cos(0) \neq 0$.

Exemple $f(x) = x$ sur $[2, 4]$
 a un maximum en 4 mais $f'(4) = 1 \neq 0$



On peut avoir $f'(a) = 0$ pour un point a intérieur
 sans que a soit un maximum/minimum local. à I

Exemple : $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto x^3$ $f'(0) = 0$



Preuve : Si a est un maximum local de f ,
 $\exists \epsilon > 0$ tel que $\forall x \in I \cap]a - \epsilon, a + \epsilon[$
 $f(x) \leq f(a)$

i.e. que $\{ |h| < \epsilon \}$

$\exists \epsilon > 0$ tel que

Si h est un nombre tel que $\begin{cases} |h| < \epsilon \\ a+h \in I \end{cases}$

on a donc $a+h \in I \cap]a-\epsilon, a+\epsilon[$

donc $f(a+h) \leq f(a)$

$$\Rightarrow f(a+h) - f(a) \leq 0$$

$$\bullet \text{ Si } h > 0, \text{ on a } \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \leq 0$$

et en faisant $h \rightarrow 0$ on a $f'(a) \leq 0$.

$$\bullet \text{ Si } h < 0, \text{ on a } \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \geq 0$$

et en faisant $h \rightarrow 0$ on a $f'(a) \geq 0$.

Donc $f'(a) = 0$.

Si a est un minimum local de f , alors c'est un maximum local de $-f$, donc $(-f)'(a) = 0$ et $f'(a) = 0$.

Théorème de ROLLE

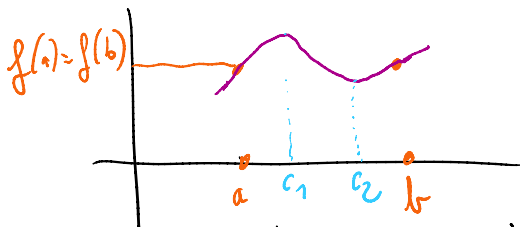
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ et $a < b$ dans I .

On suppose

- (1) $f(a) = f(b)$
- (2) f est continue sur $[a, b]$
- (3) f est dérivable sur $]a, b[$.

Alors $\exists c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$

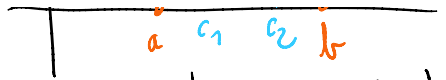
En pratique on vérifie souvent que f est dérivable sur $[a, b]$, ce qui implique (2) et (3).



Le point c sera obtenu comme un maximum / minimum local de f .

et c n'est pas unique.

Remarque:

 ce pont c n'est pas unique
(sur le chemin, c_1 et c_2 conviendraient)

maxim.

de f .