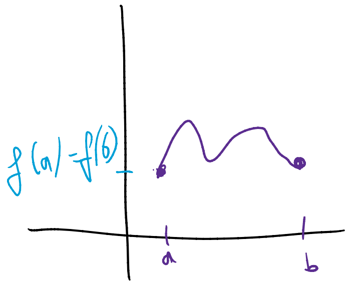
THÉORÈME DE ROLLE

$I \subset \mathbb{R}$ intervalle $a < b$ dans I

$f : I \longrightarrow \mathbb{R}$. On suppose

(1) $f(a) = f(b)$
(2) f continue sur $[a,b]$
(3) f dérivable sur $]a,b[$



ALORS $\exists\, c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$

Preuve La fonction f est continue sur l'intervalle fermé borné $[a,b]$, donc elle y est bornée et atteint ses bornes.

Si $M = \sup\{f(x) : x \in [a,b]\}$
$m = \inf\{f(x) : x \in [a,b]\}$

(1) Si $m = M$, alors f est constante, donc $f' = 0$ et n'importe quel $c \in]a,b[$ convient.

(2) Sinon $m < M$. Alors nécessairement
ou (2.1) $m < f(a) = f(b)$
ou (2.2) $f(a) = f(b) < M$.

$\rightarrow$ Dans le cas (2.2), $\exists\, c \in [a,b]$ tel que $f(c) = M$ (car f atteint ses bornes)
et en fait $c \in]a,b[$. Comme $\forall x \in]a,b[$ $f(x) \leqslant f(c) = M$,
c est un maximum local de f
et donc $f'(c) = 0$.

$\rightarrow$ Le cas (2.1) est similaire (prendre un c tel que $f(c) = m$ et dire que c'est un minimum local de f).

Théorème des accroissements finis

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle, $a < b$ dans I et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$

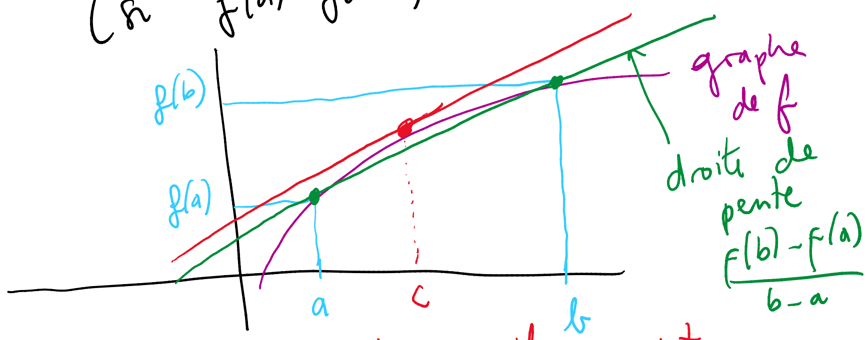
On suppose (1) f continue sur $[a,b]$
(2) f dérivable sur $]a,b[$.

… tel que …

(2) f dérivable ...

ALORS $\exists c \in]a,b[$ tel que
$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Remarque le T.A.F. implique le théorème de ROLLE (si $f(a)=f(b)$, on obtient $f'(c)=0$).



le th. des A.F. dit qu'il existe $c \in]a,b[$ où la tangente au graphe de f est parallèle à la droite passant par $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$

Preuve Soit
$$g : \begin{array}{l} I \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto f(x) - x\,\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} \end{array}$$

La fonction g est continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ (car f l'est)

$$g(a) = f(a) - a\,\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{(b-a)f(a) - a(f(b)-f(a))}{b-a}$$
$$= \frac{bf(a) - af(b)}{b-a}$$

$$g(b) = f(b) - b\,\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$
$$= \frac{(b-a)f(b) - b(f(b)-f(a))}{b-a} = \frac{-af(b)+bf(a)}{b-a}$$

Donc $g(a) = g(b)$.
Par le théorème de ROLLE, $\exists c \in]a,b[$ tel que $g'(c)=0$.

Or $g'(x) = f'(x) - \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

et $g'(c)=0$ implique $f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

... Th. des accroissements finis

Corollaire : Inégalité des accroissements finis

$I \subset \mathbb{R}$ intervalle $a < b$ dans I

$f : I \to \mathbb{R}$ dérivable sur $[a,b]$

On suppose que $\forall x \in [a,b]$ $|f'(x)| \leqslant M$

Alors $|f(b) - f(a)| \leqslant M\,|b-a|$

Preuve Par le T.A.F. $\exists c \in]a,b[$ avec

$$\left|\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right| = |f'(c)| \leqslant M$$

d'où $|f(b)-f(a)| \leqslant M\,|b-a|$.

Ce corollaire permet une preuve rapide de plusieurs inégalités sur les fonctions usuelles.

Ex : $\forall x \in \mathbb{R}$ $|\sin x| \leqslant |x|$

$|\sin'(y)| \leqslant 1$ $\forall y \in \mathbb{R}$ donc on peut appliquer l'inégalité des A.F. avec $M = 1$.

$a = 0$, $b = x$ ou $a = x$, $b = 0$

on a $|\sin(x) - \sin(0)| \leqslant 1\,|x - 0|$

d'où $|\sin x| \leqslant |x|$.

Le T.A.F. permet aussi de justifier le raisonnement derrière les tableaux de variation.

Théorème $I \subset \mathbb{R}$ intervalle, $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable

Alors f croissante sur $I \iff f' \geqslant 0$ sur I

f décroissante sur $I \iff f' \leqslant 0$ sur I

Preuve (pour la première équivalence)

$$\Rightarrow \forall a \in I \quad f'(a) = \lim_{h \to 0} \underbrace{\frac{f(a+h) - f(a)}{h}}_{\geqslant 0}$$

du même signe que h car f est croissante

donc $f'(a) \geqslant 0$.

$\Leftarrow$ On suppose $f' \geq 0$.
On veut montrer f croissante, c'est-à-dire que $a \leq b \Rightarrow f(a) \leq f(b)$

- Si $a = b$ évident
- Si $a < b$, par le T.A.F
  $\exists c \in]a, b[$ tel que

$$0 \leq f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}$$

donc $f(b) - f(a) \geq 0 \Rightarrow f(b) \geq f(a)$

Théorème du prolongement de la dérivée

$I \subset \mathbb{R}$ intervalle, $f : I \to \mathbb{R}$ continue, $a \in I$.
On suppose que f est dérivable sur $I \setminus \{a\}$ et que

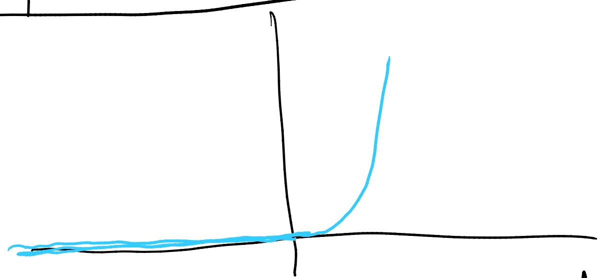
$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} f'(x) = \ell \quad (\ell \in \mathbb{R})$$

ALORS f est dérivable en a et $f'(a) = \ell$

(se démontre avec le T.A.F.)

Exemple d'application

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$$x \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ e^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$



Montrons que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
$\rightarrow$ f est dérivable sur $]-\infty, 0[$ et $\forall x \in]-\infty, 0[$ $f'(x) = 0$
$\rightarrow$ f est dérivable sur $]0, +\infty[$ (composée de fonctions usuelles)
et $f'(x) = \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}}$

$\boxed{(e^u)' = u' \cdot e^u}$ et $f'(x) = \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}}$

→ En 0 ? On applique le théorème de prolongement de la dérivée

- f est continue sur $\mathbb{R}$

  (évident sur $\mathbb{R}^*$, et en 0
  $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim\limits_{y \to -\infty} \exp(y) = 0$
  $\quad\quad\quad\quad \| \quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad \uparrow$
  $\quad\quad\quad\quad 0 \quad\quad\quad\quad\quad$ car $-\frac{1}{x} \xrightarrow[\substack{x \to 0 \\ x > 0}]{} -\infty$)

- $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} f'(x)$ existe ?

  $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} f'(x) = 0$

  $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f'(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \underbrace{\frac{1}{x^2}}_{\to +\infty} \underbrace{e^{-\frac{1}{x}}}_{\to 0}$ F.I. !!

  Posons $y = \frac{1}{x}$ $\quad = \lim\limits_{y \to +\infty} y^2 e^{-y}$

  $= \lim\limits_{y \to \infty} \frac{y^2}{e^y} = 0$ par croissances comparées.

On a donc

$$0 = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} f'(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f'(x)$$

donc (th. de prolongement) f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.

Remarque On peut montrer que cette fonction est infiniment dérivable.