

Exercice : démontrer la formule du binôme de NEWTON par récurrence sur n en utilisant (4)

(7)

A1.6 Compléments sur l'ordre dans $\mathbb{R}$

Soit $a \in \mathbb{R}$. La valeur absolue de a est définie par

$$|a| = \begin{cases} a & \text{si } a \geq 0 \\ -a & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

On rappelle les propriétés de la valeur absolue.

Pour a, b réels on a

• $\sqrt{a^2} = |a|$

• $|ab| = |a| \cdot |b|$

• $|a+b| \leq |a| + |b|$

• $|a-b| \geq ||a| - |b||$

c'est l'inégalité triangulaire
parfois appelée inégalité triangulaire inverse

Partie positive, partie négative

Pour un réel a , on note

$$a^+ = \begin{cases} a & \text{si } a \geq 0 \\ 0 & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

$$a^- = \begin{cases} 0 & \text{si } a \geq 0 \\ -a & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

Les nombres a^+ et a^- sont toujours ≥ 0 .

On a alors

$$a^+ + a^- = |a|$$

et

$$a^+ - a^- = a$$

Intervalle de $\mathbb{R}$

(8)

Définition : soit $I \subset \mathbb{R}$. On dit que I est un intervalle s'il ne contient pas de trou, c'est-à-dire :

$$\left. \begin{array}{l} \text{si } x \in I \\ y \in I \\ \text{et } z \in \mathbb{R} \text{ vérifie } x < y < z \end{array} \right\} \text{ alors } z \in I$$

Les intervalles de $\mathbb{R}$ sont du type suivant

- $\mathbb{R}$
- $\emptyset$, l'ensemble vide, qui ne contient aucun élément
- $\{a\}$ pour $a \in \mathbb{R}$ (un singleton)
- $] -\infty, a]$ ou $] -\infty, a[$ ou $[a, +\infty[$ ou $]a, +\infty[$ pour $a \in \mathbb{R}$
(INTERVALLES NON BORNÉS)
- $[a, b]$ ou $[a, b[$ ou $]a, b]$ ou $]a, b[$ pour $a < b$ dans $\mathbb{R}$
(INTERVALLES BORNÉS)

Un intervalle du type $[a, b]$ (fermé et borné)
est aussi appelé un segment.

B1.1 Ensembles

Ensemble = collection d'éléments, sans répétition
et sans ordre

On a donc $\{1, 4, 5\} = \{4, 1, 5\} = \{1, 1, 5, 5, 5, 4\}$

Autres façons de définir des ensembles

$$\{2k : k \in \mathbb{Z}\} = \{n \in \mathbb{Z} : n \text{ est pair}\} \quad \text{l'ensemble des nombre pairs}$$

↑
ls : se lisent "tel que".
ou encore "où"

ou encore

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\} = \{(\cos(t), \sin(t)) : t \in \mathbb{R}\}$$

le cercle unité

↑
dans cette écriture, chaque point de D est répété une infinité de fois ; néanmoins l'ensemble décrit est le même.

B1.2 Opérations sur les ensembles

Soit E un ensemble et $A \subseteq E$ $\left[\begin{array}{l} A \text{ est inclus dans } E, \text{ ou encore} \\ A \text{ est une partie de } E \end{array} \right]$

le complémentaire de A dans E est

$$E \setminus A = \{x \in E : x \notin A\}$$

$E \setminus A$ est parfois noté $C_E A$ ou encore $\bar{A}$

Si $A \subseteq E$ et $B \subseteq E$, alors

(10)

$A \cup B = \{x \in E : x \in A \text{ ou } x \in B\}$ est la réunion de A et de B.

$A \cap B = \{x \in E : x \in A \text{ et } x \in B\}$ est l'intersection de A et de B.

Règles de calcul : soient A, B, C des parties d'un ensemble E

• commutativité

$$A \cap B = B \cap A \quad A \cup B = B \cup A$$

• associativité

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C \quad A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$

• éléments neutres

$$A \cap E = A$$

$$A \cup \emptyset = A$$

• distributivité

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

• le complémentaire échange $\cap$ et $\cup$

$$E \setminus (A \cup B) = (E \setminus A) \cap (E \setminus B) \quad \left[\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B} \right]$$

$$E \setminus (A \cap B) = (E \setminus A) \cup (E \setminus B) \quad \left[\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B} \right]$$

On a aussi : $A \subseteq B$ si et seulement si $E \setminus B \subseteq E \setminus A$.

B1.3 Produit cartésien

Soient ~~E et F~~ E et F deux ensembles. Le produit cartésien de E et F est

$$E \times F = \{(x, y) : x \in E \text{ et } y \in F\}. \quad \text{On note } E^2 = E \times E$$

Exemple $\mathbb{R}^2$ désigne le plan, l'ensemble des couples de réels.

B 1.4 Applications

pour nous, ce sont
des synonymes.

(11)

Une application (ou une fonction) est la donnée

- d'un ensemble de départ E
- d'un ensemble d'arrivée F
- d'une flèche $f: E \rightarrow F$ qui associe à tout élément x de E un élément noté $f(x)$ de F .

Exemples

$$f_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto 2x+3$$

$$f_2: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \frac{1}{x}$$

$$f_3: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}^*$$

$$x \mapsto \frac{1}{x}$$

f_2 et f_3 ne sont pas la même fonction car elles n'ont pas le même ensemble d'arrivée

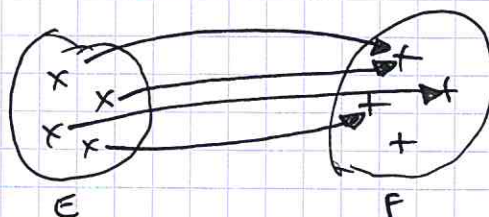
$$|\cdot|: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$$

$$x \mapsto \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Le graphe d'une fonction $f: E \rightarrow F$ est l'ensemble

$$G(f) = \{ (x, f(x)) : x \in E \} \subset E \times F$$

Ce dessin peut aider



x éléments de E
 $+$ éléments de F