B1.5 Injectivité, surjectivité, bijectivité.

Concepts <u>fondamentaux</u> qu'il faut bien comprendre

Soit $f : E \to F$ une application

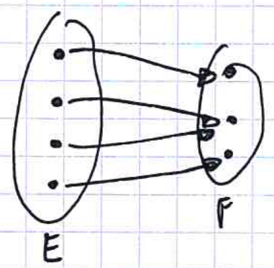
Si $x \in E$ et $y \in F$ sont tels que $f(x) = y$, on dit que

- y est <u>l'image</u> de x (on dit "l'image" et non "une image" car il n'y en a qu'une)
- x est <u>un antécédent</u> de y (on dit "un antécédent" et non "l'antécédent" car il peut y en avoir plusieurs).

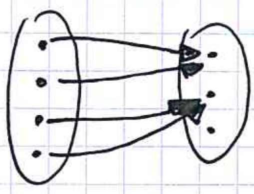
<u>Définition</u> : On dit que $f : E \to F$ est <u>surjective</u> (on nomme surjection)
si tout élément de F admet au moins un antécédent :

$$\boxed{\text{pour tout } y \in F \text{, il existe } x \in E \text{ tel que } y = f(x)}$$

"Tous les points de F sont atteints par les flèches"



surjective

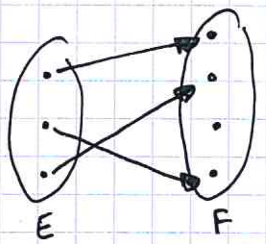


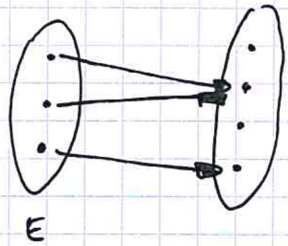
non surjective

<u>Définition</u> On dit que $f : E \to F$ est injective (= une injection) si tout élément de F admet <u>au plus</u> un antécédent,

ou encore : si x_1, x_2 dans E vérifient $f(x_1) = f(x_2)$, alors $x_1 = x_2$

" pas de collision entre flèches "

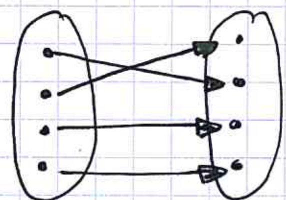




injective

non injective

<u>Définition</u> On dit que $f : E \to F$ est bijective si elle est injective et surjective. Cela revient à dire que tout élément de F a un <u>unique</u> antécédent.



<u>Remarque</u> : si $f : E \to F$ est bijective, alors E et F ont le même nombre d'éléments (éventuellement infini).

Soit $f : E \to F$ une bijection. On peut alors définir une application $f^{-1} : F \to E$

$y \mapsto$ l'unique x tel que $f(x) = y$.

L'application f^{-1} est <u>bijective</u> et s'appelle la bijection réciproque de f.

On a les formules :

$$\forall x \in E, \qquad f^{-1}(f(x)) = x$$

$$\forall y \in E, \qquad f(f^{-1}(y)) = y$$

(f^{-1} : on renverse le sens des flèches).

B1.6 Composition

Soient E, F, G des ensembles

$f : E \to F$ et $g : F \to G$ des applications

On peut alors définir la composée de f et g comme la fonction

$$g \circ f : E \longrightarrow G$$
$$x \longmapsto g(f(x))$$

Attention : la composition $g \circ f$ n'est définie que si l'ensemble d'arrivée de f est inclus dans l'ensemble de départ de g.

EX

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sin x$ $\qquad$ $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x+2$ $\qquad$ $\cancel{h : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto 3x^2}$

$f \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sin(x+2)$ $\qquad$ $g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sin(x) + 2$

On appelle fonction identique (ou identité) d'un ensemble E la fonction $id_E : \begin{array}{l} E \longrightarrow E \\ x \longmapsto x \end{array}$

Si $f : E \to F$ est une bijection, alors
$$f^{-1} \circ f = id_E \qquad f \circ f^{-1} = id_F$$

B 1.7 Image directe, image réciproque

Soit $f : E \to F$ une application

- Si A est une partie de E, l'image directe de A par f est
$$f(A) = \{ f(x) : x \in E \} \quad ; \quad f(A) \subset F$$

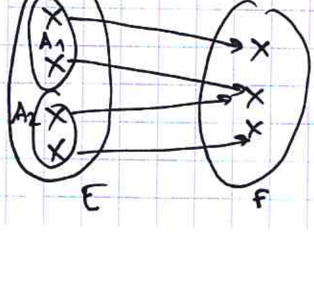
- Si B est une partie de F, l'image réciproque de B par f est
$$f^{-1}(B) = \{ x \in E : f(x) \in B \}$$

Propriétés Soient $f : E \to F$ une application, et B_1, B_2 des parties de F. Alors

$$f^{-1}(F \setminus B_1) = \cancel{f}\, E \setminus f^{-1}(B_1)$$
$$f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$$
$$f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$$

Ce n'est pas vrai pour l'image directe

Ex :



$$f(A_1 \cap A_2) = f(\phi) = \phi$$
$$f(A_1) \cap f(A_2) \neq \phi.$$